

Université Gaston Berger de Saint-Louis

UFR des Sciences Appliquées et Technologie

MEMOIRE

Présenté par :

Taleb Ely OULD TALEB AHMED

Pour obtenir le

*Diplôme d'Etudes Approfondies de
Mathématiques Appliquées*

Option : Probabilité et Statistique

Les Mesures de la pauvreté, de l'inégalité et l'impact de la croissance économique

Soutenu le 10 Janvier 2003 devant le jury composé de :

Président

Gane Samb	LO	Maître de conférence	S.A.T	U.G.B	Encadreur
------------------	-----------	----------------------	-------	-------	-----------

Membres

Galaye	DIA	Professeur	S.A.T	U.G.B.
Zeine	OULD ZEIDANE	Maître de conférence	F.S.T.	U.NKC
Alioune	DIOP	Maître Assistant	S.A.T	U.G.B.
Aboubakry	DIAKHABY	Maître Assistant	S.A.T	U.G.B.
Fodiyé	DOUKOURE	Maître Assistant	FA.S.E.G	U.C.A.D

Avant-propos

le but essentiel de cet mémoire est de contribuer modestement au renforcement des capacités analytiques dans la sous-Region et plus particulièrement en Mauritanie et au Sénégal en fournissant au lecteur des éléments conceptuels et analytiques qui soustendent la plupart des études empiriques d'évaluation de l'impact des politiques socio-économiques sur le binôme «pauvreté-inegalité».

Remerciements

Je saisis cette occasion pour exprimer mes remerciements et ma profonde gratitude à mon encadreur M. Gane Samb LO pour son assistance précieuse et ses commentaires utiles.

Je remercie également Zeine OULD ZEIDANE pour ses suggestions appréciables et son soutien tout le long de la préparation de ce mémoire. Mes remerciements sont adressés également à tous ceux et toutes celles qui ont contribué à la réalisation de ce travail. Je veux citer notamment mes professeurs M. Professeur Galaye DIA, M. Alioune DIOP, tout le personnel de l'UFR de MAI à l'UGB et tout le personnel du CMAP et du CDHLCPI.

Ma reconnaissance fraternelle va à M. Yahya OULD AHMED ELWAKEF qui tout fait pour m'orienter, soutenir et pour me fournir des documents intéressants et utiles afin que ce travail puisse voir le jour.

Table des matières

Introduction

De plus en plus, les gouvernements des pays en voie de développement et les organisations internationales chargées de l'aide au développement se préoccupent des effets sociaux des stratégies de développement ou des réformes de politiques socio-économiques. Cette préoccupation accrue tient au fait que l'on s'est finalement rendu à l'évidence que *l'homme doit être la mesure de toute chose*. En d'autres termes, toute politique socio-économique doit viser l'amélioration du bien-être de l'ensemble de la population concernée. Il serait donc permis de penser que la réduction de la pauvreté doit être l'objectif ultime qui sous-tend toute politique socio-économique. Le but de cet mémoire est, par conséquent, d'enrichir les recherches orientés vers l'analyse de la dialité : «pauvreté-inegalité» pour pouvoir présenter les concepts et instruments d'analyse essentiels à l'évaluation de l'impact d'une politique socio-économique sur la répartition du niveau de bien-être. Pour ce faire, le mémoire a été subdivisé en trois chapitres :

Dans le premier chapitre j'ai analysé le phénomène de la pauvreté, j'ai insisté en particulier sur les genres du phénomène, la mesure de ce phénomène et la modélisation des propriétés qui doivent être vérifiées pour sa pertinence. Il s'attelle particulièrement à décrire la pauvreté monétaire et la pauvreté des conditions de vie.

Le deuxième chapitre est consacré à l'analyse de l'inégalité. Il porte essentiellement sur la mesure. Il décrit principalement la comparaison des courbes de Lorenz, la comparaison des courbes de concentration, le coefficient de concentration, l'indicateur d'entropi généralisé, la décomposition du coefficient de Gini.

Le dernier chapitre traite essentiellement de l'évaluation des évolutions de pauvreté par rapport à ses dimensions principales : le niveau moyen de vie et l'inégalité relative. Il ajoute en plus un moyen supplémentaire pour interpoler la courbe de Lorenz.

Chapitre 1

La mesure de pauvreté

Dans la description de la pauvreté, la situation d'un individu est appréciée par rapport à un indicateur de niveau de vie (bien-être) et pour un seuil de pauvreté. La notion de niveau de vie est ainsi pluridimensionnelle en ce sens qu'elle peut être appréciée de différentes manières : (revenus, dépense, besoins essentiels, propriété des ressources, patrimoine, etc.,...). De façon générale, on peut dire que le niveau de vie d'un individu dépend de sa dotation en ressources et de son accès aux services publics.

A ce niveau, quelques difficultés surgissent lorsqu'on veut définir la pauvreté. En particulier le concept de pauvreté se définit à partir du critère d'appréciation du niveau de vie.

- Du point de vue de revenu, une personne est pauvre si et seulement si son niveau de revenu est inférieur à un seuil de pauvreté défini préalablement.
- Du point de vue des besoins essentiels, la pauvreté est le fait d'être privé des moyens matériels permettant de satisfaire un minimum acceptable de besoins, notamment alimentaires. Ce concept de privation, ou de dénuement, va bien au-delà d'une insuffisance de revenu individuel : il comprend également le besoin de prestations élémentaires de santé et d'une éducation de base, ainsi que de services essentiels qui doivent être fournis par la communauté afin d'empêcher les individus de sombrer dans la pauvreté. Ce concept tient également compte des besoins d'emploi et de participation à la vie de la société.
- Du point de vue des capacités, la pauvreté représente l'absence de certaines capacités fonctionnelles élémentaires. Cette forme de pauvreté s'applique donc aux personnes n'ayant pas la possibilité d'atteindre des niveaux minimum acceptables concernant ces capacités fonctionnelles. Celles-ci peuvent aller du domaine matériel - disposer d'une alimentation convenable, être correctement vêtu et logé et être prémuni contre

les maladies pour lesquelles existe une prophylaxie, par exemple - à des critères sociaux plus complexes tels que la participation à la vie de la collectivité. L'approche par les capacités concilie les notions de pauvreté absolue et relative.

Dans ce travail je me bornerai à deux concepts pertinents de la pauvreté : la pauvreté monétaire et la pauvreté humaine.

1.1 La pauvreté monétaire

1.1.1 Le concept de pauvreté monétaire

Sur le plan pratique, il importe cependant de disposer d'une mesure monétaire unidimensionnelle du niveau de vie. Les fondements théoriques¹ d'une telle mesure se trouvent dans le comportement de consommateur. En effet, par hypothèse le consommateur choisit le panier de bien qui lui procure le bien-être maximal, compte tenu de la contrainte de ressources à laquelle il fait face. Ce comportement optimal implique une correspondance entre le niveau des dépenses (qui, elles, sont mesurables) et celui du bien-être sous-jacent. Par conséquent, on peut favoriser le choix de consommation effective comme indicateur du bien-être. Cependant certains auteurs (SEN, 1979, 1983) préfèrent retenir directement le revenu, qui permet de cerner les moyens dont dispose un ménage pour atteindre un certain niveau de bien-être. Au contraire, la consommation constitue une évaluation des résultats atteints et ne permet pas de rendre compte des différences de mode de vie et de goûts individuels. Par exemple, dans un pays comme la MAURITANIE, les différences importantes de mode de vie entre nomades et sédentaires conduisent à des structures de consommation différentes, notamment en matière de logement.

Au-delà des hésitations théoriques, le choix effectif entre consommation et revenu est souvent dicté par la disponibilité de l'information. Dans les pays africains, les enquêtes auprès des ménages portent le plus souvent sur les seules dépenses de consommation, et les informations collectées sur le revenu ne sont pas toujours fiables du fait d'une sous-estimation volontaire par les enquêtés. Dans les études appliquées, on retient donc le plus souvent les dépenses de consommation d'un ménage comme indicateur de bien-être.

¹voir Ravallion par exemple

1.1.2 Seuil de pauvreté

Le choix de l'indicateur de niveau de vie étant discuté plus loin, on commence par présenter le choix du seuil de pauvreté en se restreignant aux mesures monétaires de la pauvreté. Dans une première approche, l'approche nutritionnelle, la pauvreté correspond à la situation des individus dont la santé est en danger et les conditions de survie ne sont plus assurées. Le seuil est d'abord exprimé comme le minimum calorique indispensable à la survie, il peut alors être calculé sur l'échelle des revenus à partir des dépenses nécessaires à l'achat de ce minimum nutritionnel. Une deuxième approche élargit le concept de pauvreté à l'ensemble des besoins de base qui doivent être satisfaits pour mener une vie digne en société, ceci peut être accompli *en divisant le coût minimum du panier alimentaire par le ratio moyen de dépense alimentaire par rapport aux dépenses totales* (CALLAN et NOLAN, 1991). Une troisième approche postule que le seuil de pauvreté peut être mesuré par la part des déciles inférieurs dans la distribution des revenus et qu'il doit refléter une certaine stratification sociale. Une dernière approche consiste à choisir une fraction donnée des dépenses moyennes par habitant ; *les proportions les plus usitées sont deux tiers et un tiers des dépenses moyennes par habitant*. L'examen comparatif de ces approches va nous permettre de préciser la mesure du seuil de pauvreté sous deux aspects : *la place des jugements de valeur puis son caractère absolu*.

1.2 Les indicateurs synthétiques de la pauvreté

Lorsque le seuil z de pauvreté a été identifié, différents indicateurs synthétiques peuvent être proposés pour agréger les situations individuelles en une mesure synthétique. Dans la présentation qui suit le bien-être est mesuré aussi bien par la consommation ou le revenu. Mais par commodité on utilise souvent le terme "revenu" dans les deux cas. Ainsi le bien-être d'un individu i est représenté par un nombre y_i . Tandis que le vecteur y des revenus individuels -qui sont préalablement ordonnés par ordre croissant- représente le bien-être de la population étudiée comme suit :

$$y = (y_i)_{1 \leq i \leq m} \quad \text{où} \quad y_i \leq y_j \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq j \leq m; \quad m \in \mathbb{N} \quad (1)$$

Où m est le nombre des individus de la population.

Définition 1.2.1 *Un indicateur synthétique de pauvreté dans une population de n individus est une application P_n de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ dans $[0, 1]$:*

$$\begin{aligned}
P_n : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow [0, 1] \\
(y, z) &\longmapsto P_n(y, z)
\end{aligned} \tag{2}$$

1.2.1 Les indicateurs élémentaires de la pauvreté

L'agrégation quantitative des situations individuelles de pauvreté peut recourir des formes très différentes.

i) Mesure de l'incidence :

Définition 1.2.2 *L'incidence de la pauvreté désigne la proportion des individus dont le revenu est en dessous du seuil de pauvreté dans la population totale soit :*

$$H_n(y, z) = \frac{q(z)}{n} \tag{3}$$

où n désigne le nombre des individus dans la population totale et q le nombre de pauvres i.e

$$q = \max_{1 \leq j \leq n} \{j/y_j < z\} = \min_{1 \leq j \leq n} \{j/y_{j+1} \geq z\} \tag{4}$$

Remarque 1.2.1 *La mesure d'incidence n'apporte aucune information sur la situation des pauvres, notamment sur l'écart de leur revenu par rapport au seuil de pauvreté.*

ii) Mesure de l'intensité moyenne

Définition 1.2.3 *Soit g_i et e_i , l'écart et l'écart relatif individuel au seuil de pauvreté :*

$$g_i = z - y_i \tag{5}$$

et

$$e_i = \frac{g_i}{z} \tag{6}$$

La mesure de l'intensité moyenne² de la pauvreté est définie comme suit :

$$I_n(y, z) = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q e_i = 1 - \frac{\mu_p(y, z)}{z} \tag{7}$$

où $\mu_p(y, z)$ est le revenu moyen des pauvres, soit :

$$\mu_p((y_1, \dots, y_q, \dots, y_n), z) = \sum_{i=1}^q \frac{y_i}{q} \tag{8}$$

²Cette mesure est parfois appelée déficit de revenu(AHO, LARIVIERE et MARTIN, 1997).

Remarque 1.2.2

– Soit D le montant nécessaire pour éliminer la pauvreté alors

$$D = \sum_{i=1}^q (z - y_i) = \sum_{i=1}^q g_i = qzI_n(y, z) \quad (9)$$

– Par construction, l'intensité moyenne ne dépend pas de la dispersion du revenu parmi les pauvres.

iii) L'inégalité de revenu parmi les pauvres :

Le troisième indicateur élémentaire de la pauvreté peut être mesuré par le coefficient de variation C_p ou l'indice de GINI ³ G_p associés à la distribution y^* du revenu parmi les seuls pauvres. où :

$$y^* = (y_1, y_2, \dots, y_q) \quad (10)$$

est la projection sur le sous-espace engendré par les dotations des pauvres.

$$C_p = \frac{\sigma_p(y, z)}{\mu_p(y, z)} \quad (11)$$

où σ_p désigne l'écart-type de la distribution y^*

$$\sigma_p(y, z) = \left\{ \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q [y_i - \mu_p(y, z)]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{1}{q} \sum_{i=1}^q [y_i^2 - \mu_p^2(y, z)] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

Et

$$G_p = 1 - \sum_{i=1}^q [2(q - i) + 1] \frac{y_i}{q^2 \mu_p} \quad (13)$$

Ces différentes mesures élémentaires de la pauvreté sont en fait complémentaires et leur évolution peut parfois recouvrir des situations très différentes. Par exemple, lorsque la dotation initiale d'un pauvre augmente sans toutefois dépasser le seuil de pauvreté, l'incidence reste identique mais son intensité moyenne diminue. De même, si la dotation d'un pauvre est en partie redistribuée en faveur d'un plus pauvre, sans que la dotation de ce dernier après redistribution ne franchisse le seuil de pauvreté, l'inégalité parmi les pauvres peut décroître alors que l'incidence et l'intensité moyenne restent inchangées(exemple 1.2.1).

³Pour plus de détail concernant l'indice de Gini vous êtes renvoyés au deuxième chapitre.

Remarque 1.2.3 Si la préoccupation porte aussi bien sur l'incidence que sur l'intensité moyenne, on pourrait proposer la mesure suivante :

$$K_n(y, z) = H_n I_n = \sum_{i=1}^q \frac{g_i}{nz} = \frac{q}{n} \left(1 - \frac{\mu_p}{z}\right) \quad (14)$$

Remarque 1.2.4 Cette dernière mesure permet également de calculer le montant des dépenses totales qu'il faudrait consacrer à une réduction totale de la pauvreté soit $qzI_n = nzK_n = D$.

Exemple 1.2.1 Soit une population fictive comprenant quatre individus. On dispose d'une somme de 100 unités de compte (u.c) à distribuer entre ces individus. Le tableau (1) présente quatre cas possibles.

Tableau (1)

L'individu i	Cas no1	Cas no2	Cas no3	Cas no4
1	10	15	10	10
2	20	20	10	20
3	25	20	35	30
4	45	45	45	40

Pour un seuil de pauvreté fixé à 34 (u.c), on obtient les différentes mesures de pauvreté illustrées dans le tableau (2)

Tableau (2)

La mesure	H	I	K	C_p	G_p
Cas no1	0.75	0.461	0.346	0.116	0.182
Cas no2	0.75	0.461	0.346	0.017	0.061
Cas no3	0.5	0.706	0.353	0	0
Cas no4	0.75	0.412	0.308	0.167	0.222

1.2.2 Une approche axiomatique de la mesure synthétique de pauvreté

Une mesure synthétique de la pauvreté et de ces différents aspects quantitatifs (incidence, intensité et inégalité) est-elle possible ? La démarche axiomatique,

développée progressivement dans la littérature (SEN, 1976 ; FOSTER, GREER et THORBECKS, 1984 ; SHORROCKS, 1995) permet de répondre à cette question en spécifiant un indicateur synthétique à partir de propriétés clairement explicitées. Cette approche conduit ainsi l'utilisateur de mesures de pauvreté à préciser la signification qu'il donne à la pauvreté et à son évolution. Avant de présenter et discuter les principaux axiomes qui ont été progressivement mis en avant par ce type d'approche nous allons commencer par la convention suivante.

Notation : Soit y le vecteur des dotations ($y \in \mathbb{R}^n$, par exemple) y est supposé être trié par ordre croissant

$$y = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{telles que} \quad y_i \leq y_j \quad \text{pour} \quad i \leq j \quad (15)$$

Et on utilise souvent l'écriture

$$y = (y_z, y_z^*) \quad (16)$$

tels que

$$\begin{aligned} y_z &= (y_1, \dots, y_q); & y_z^* &= (y_{q+1}, \dots, y_n) \quad \text{pour} \quad z \in]y_q, y_{q+1}] \\ {}^4P_n &: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (y, z) &\longmapsto P_n(y, z) \\ &\forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (17)$$

Par la suite nous allons présenter une série d'axiomes qui définissent la qualité d'une mesure de la pauvreté :

1. Axiome de symétrie

La mesure de pauvreté est inchangée par une permutation des allocations initiales entre les individus. En d'autre terme Si σ est une permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ dans $\{1, 2, \dots, n\}$ alors :

$$P_n((y_i)_{1 \leq i \leq n}, z) = P_n((y_{\sigma(i)})_{1 \leq i \leq n}, z); \forall y \in \mathbb{R}^n, \forall z \in \mathbb{R} \quad (18)$$

2. Axiome de focalisation

La mesure de pauvreté ne dépend pas de la dotation y_i des non pauvres, i.e

$$P_n(y, z) = P_q(y_z, z) \quad (19)$$

3. Axiome d'invariance par réplication

La mesure de pauvreté dans une réunion de deux populations identiques est égale à la mesure de pauvreté dans chaque population séparée. i.e

$$P_{2n}((y, y), z) = P_n(y, z) \quad (20)$$

⁴ $P_n(y, z)$ désigne une telle mesure de pauvreté pour une population de taille n .

4. Axiome d' invariance additive ou multiplicative

Définition 1.2.4 Une mesure vérifie l'axiome d'invariance additive si :

$$P_n(y + \alpha I, z + \alpha) = P_n(y, z); \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad (21)$$

où $I = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$

Définition 1.2.5 Une mesure de pauvreté est invariante multiplicativement si :

$$P_n(ty, tz) = P_n(y, z) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad (22)$$

Ces deux propriétés ne correspondent pas à la distinction qui a pu être faite entre pauvreté absolue et pauvreté relative. Alors que les deux propriétés d'invariance renvoient plutôt à l'évolution d'un individu pauvre et un individu non pauvre.

5. Axiome de continuité par rapport au seuil de pauvreté

$$\lim_{z \rightarrow z_0} P_n(y, z) = P_n(y, z_0) \quad (23)$$

Si cet axiome n'est pas vérifié, la mesure de pauvreté connaît une rupture lorsque le seuil de pauvreté varie légèrement. Par exemple, une révision à la hausse du seuil de pauvreté, même limitée, peut se traduire par une marche d'escalier dans la mesure d'incidence si la dotation de nombreux individus dépassait à peine la valeur initiale du seuil.

6. Axiome de monotonie

$P(y, z)$ est monotone décroissante par rapport à chaque composante de y_z i.e ; si $y_z = (y_i)_{1 \leq i \leq q}$; alors :

$$P_q((y_1, \dots, y_i - r, \dots, y_q), z) > P_q((y_1, \dots, y_i, \dots, y_q), z) \quad (24)$$

$\forall r \in \mathbb{R}_+^* ; \forall i \leq q$.

7. Axiome de transfert

$$P_n((y_1, \dots, y_i - r, \dots, y_j + r, \dots, y_n), z) > P_n((y_1, \dots, y_n), z) \quad (25)$$

$\forall r \in \mathbb{R}_+^* ; \forall i < j \leq q$.

C'est à dire qu' un transfert d'un individu pauvre vers un individu moins pauvre doit augmenter le niveau de pauvreté pour que cette propriété soit vérifiée.

L'apparente évidence de cet axiome est trompeuse. Ainsi, le transfert partiel de dotation d'un pauvre peut permettre à un moins pauvre de devenir "riche" (en passant au dessus du seuil de pauvreté). Dans ce cas, l'intensité de la pauvreté peut augmenter mais l'incidence diminue. (exemple 1.2.1 *cas no1* \rightarrow *cas no3*). En fait certains auteurs ont souligné que cet axiome de transfert ne devait pas être systématiquement vérifié dès lors qu'on attache une certaine importance à l'incidence de la pauvreté (SEN, 1979).

8. Axiome de transferts décroissants

$$\begin{aligned} P_n((y_1, \dots, y_i - r, \dots, y_k + r, \dots, y_n), z) - P_n((y_1, \dots, y_j - r, \dots, y_k + r, \dots, y_n), z) \\ = f(y_i, r) - f(y_j, r) \\ \text{pour } i, j \leq q \quad \text{et } r \in \mathbb{R}_+^* \end{aligned} \quad (26)$$

Où f est une fonction strictement décroissante de taux strictement croissant par rapport à la première composante, strictement croissante par rapport à la deuxième composante.

L'axiome conduit à dire qu'un transfert d'un pauvre vers un individu plus "riche" fait une augmentation de la mesure de pauvreté, dont l'importance est d'autant plus grande que la dotation initiale y_i du pauvre est faible.

Remarque 1.2.5 Une mesure de pauvreté vérifiant cet axiome accorde nécessairement un poids plus important au plus pauvre *i.e*

$$\forall i \in \{1, \dots, q\}; \mu_i(y, z) = \psi(y_i) \quad (27)$$

Où ψ est une fonction strictement décroissante et $\mu_i(y, z) = \psi(y_i)$ est le poids accordé à l'écart relatif de l'individu i .

9. Axiome de cohérence par sous-groupe

Pour définir explicitement l'axiome de cohérence par sous-groupe⁵, Supposons qu'on a une population de taille n , subdivisée en k sous-groupes chacun de taille n_j ($1 \leq j \leq k$) et $n = \sum_{j=1}^k n_j$. Supposons de plus que la distribution initiale de la population $y = ((y^j)_{1 \leq j \leq k})$ est engendrée par les distributions initiales y^j des

⁵Dans la littérature, ce principe a d'abord été présenté comme un axiome de monotonie par sous groupe (Foster, Greer, Thorbecke, 1984).

sous-groupes. Si on fait redistribuer de nouveau le revenu du sous-groupe i , on obtient les distributions :

$$\tilde{y}^i \quad \text{et} \quad \tilde{y} = ((y^j)_{\substack{1 \leq j \leq k \\ j \neq i}}, \tilde{y}^i)$$

Alors dans ce cas

$$\text{signe}[P_{n_i}(y^i, z) - P_{n_i}(\tilde{y}^i, z)] = \text{signe}[P_n(y, z) - P_n(\tilde{y}, z)] \quad (28)$$

Ce critère, qui constitue un principe de cohérence entre les évolutions de la pauvreté dans une collectivité et la population totale, est généralement souhaitable. Mais il importe ici de signaler la nécessité du terme "redistribuer" pour exclure de cette propriété toute les modifications intergroupes (voir le contre exemple 1.2.2).

Exemple 1.2.2 Une population est répartie en deux régions A et B . On retient l'intensité moyenne comme mesure de pauvreté. A est la région la plus pauvre. Un pauvre de la région A migre vers la région B . Son revenu est égal au revenu moyen des pauvres de la région A , i.e(la pauvreté reste constante dans A). Mais elle s'accroît dans B qui accueille un individu plus pauvre que la moyenne. Si on désigne par I_1^A, I_1^B et I_1 les mesures de pauvreté avant la migration des régions A, B et la population totale, respectivement ; I_2^A, I_2^B et I_2 les mesures de pauvreté après la migration ; μ_p^A, μ_p^B et μ_p les revenus moyens des pauvres respectivement de A, B et la population totale on a :

$$I_1^A = \frac{1}{zq_1} \sum_{i=1}^{q_1} g_i = \frac{q_1(z - \mu_p^A)}{q_1z} = 1 - \frac{\mu_p^A}{z} \quad (29)$$

et

$$I_2^A = \frac{(q_1 - 1)(z - \mu_p^A)}{(q_1 - 1)z} = 1 - \frac{\mu_p^A}{z} = I_1^A \quad (30)$$

Pour le deuxième groupe

$$I_1^B = \frac{1}{q_2z} \sum_{i=1}^{q_2} g_i = \frac{q_2(z - \mu_p^B)}{q_2z} = 1 - \frac{\mu_p^B}{z} \quad (31)$$

et

$$I_2^B = \frac{1}{(q_2 + 1)z} \left[\sum_{i=1}^{q_2} g_i + z - \mu_p^A \right] = \frac{1}{(q_2 + 1)z} [q_2(z - \mu_p^B) + z - \mu_p^A] \quad (32)$$

Donc

$$I_2^B = \frac{(q_2 + 1)(z - \mu_p^B)}{(q_2 + 1)z} + \frac{(\mu_p^B - \mu_p^A)}{(q_2 + 1)z} \quad (33)$$

(puisque A est plus pauvre que B , $\mu_p^A \leq \mu_p^B$). Il vient

$$I_2^B \geq I_1^B \quad (34)$$

Donc B est devenu plus pauvre qu'initialement tandis que

$$I_1 = 1 - \frac{\mu_p}{z} = I_2 \quad (35)$$

ne change pas, ce qui n'est pas tout à fait ce qui est marqué dans l'axiome.

10. Axiome de décomposabilité :

Définition 1.2.6 : Une mesure $P_n(y, z)$ est dite décomposable si et seulement si pour toute partition de la distribution y en k classes (y^1, \dots, y^k) on a :

$$P_n(y, z) = \sum_{j=1}^k \left[\frac{n_j}{n} P_{n_j}(y^j, z) \right] \quad (43)$$

où n_j est l'effectif de la classe j et n l'effectif total .

De plus

$$C_j = \frac{n_j P_{n_j}(y^j, z)}{n P_n(y, z)} \quad (44)$$

est la contribution de la classe j à la pauvreté.

Remarque 1.2.6 : Le calcul des contributions C_j permet de déterminer les zones ou groupes socio-économiques où il y a concentration de la pauvreté ce qui est un moyen supplémentaire de ciblage des zones de pauvreté. De plus :

$$\sum_j C_j = 1 \quad (45)$$

Remarque 1.2.7 La mesure de l'intensité ne vérifie pas la propriété de cohérence par sous-groupe (voir exemple 1.1.3).

Exemple 1.2.3 : Dans une population de 21 habitants, $y_1(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12)$ partagée à deux sous-groupes A et B , la distribution initiale est $A_1(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$ $B_1(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 12)$. Et la distribution finale $y_2(1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 15)$ est obtenue par le transfert de revenu de moins riche de A au plus riche de même sous-groupe $A_2(1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 15)$; $B_2(1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 12)$. Si on retient l'intensité moyenne comme mesure de la pauvreté pour un seuil fixé à $z = 8$, on obtient le tableau(3).

Tableau(3) :

seuil $z = 8$	les distribution initiales			les distributions finales		
	A_1	B_1	y_1	A_2	B_2	y_2
l'intensité moyenne	$I_1^A = 0.5$	$I_1^B = 0.775$	$I_1 = 0.662$	$I_2^A = 0.516$	$I_2^B = 0.775$	$I_2 = 0.660$

On peut remarquer à partir de cet exemple que l'intensité moyenne ne vérifie pas l'axiome de cohérence par sous-groupe.

Remarque 1.2.8 *Un indice décomposable vérifie la propriété de cohérence par sous-groupe.*

Les deux derniers axiomes sont généralement considérés comme souhaitables. Elles conduisent alors à éliminer de façon rédhitoire les mesures qui ne les satisfont pas, comme l'indice de GINI par exemple, surtout si l'analyse de la pauvreté repose sur un découpage géographique, ethnique, ...

1.2.3 Les mesures de SEN et FOSTER-GREER et TOR-BECKE

1-La mesure de SEN :

SEN a proposé une famille de mesures générales agrégées de la pauvreté par la somme pondérée des écarts individuels au seuil de pauvreté :

$$P_n(y, z) = A(y, z) \sum_{ipauvre} g_i \mu_i(y, z) \quad (46)$$

Où $A(y, z)$ est une fonction de y et z ; $\mu_i(y, z)$ est une pondération des écarts individuels au seuil de pauvreté.

Le cadre formel proposé par SEN est construit à partir des deux axiomes suivants :

Axiome C : (*classement ordinal de privation relative*)

Le poids est d'autant plus important que l'écart est grand

$$\mu_i(y, z) = q + 1 - i \quad (47)$$

Axiome N : (*normalisation de privation absolue*)

Si tous les pauvres disposent du même revenu, alors

$$P_n(y, z) = K_n(y, z) \quad (48)$$

Proposition 1.2.1 : La seule mesure de la famille précédente compatible avec les deux axiomes est donnée par :

$$Ps_n(y, z) = \frac{2}{(q+1)nz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i = H_n[I_n + \frac{q}{q+1}(1-I_n)G_p] \quad (49)$$

Preuve de la proposition :

Montrons d'abord l'unicité de la mesure :

En combinant les deux axiomes C et N on obtient :

$$K_n(y, z) = H_n(y, z)I_n(y, z) = \frac{\sum_{i=1}^q g_i}{nz} = P_n(y, z) = A(y, z) \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i \quad (50)$$

Puisque $(g_1 = g_2 = \dots = g_q)$ on a :

$$\frac{qg_1}{nz} = A(y, z) \frac{q(q+1)}{2} g_1 \quad (51)$$

En d'autre terme

$$A(y, z) = \frac{2}{(q+1)nz} \quad (52)$$

Et on en déduit donc

$$Ps_n(y, z) \frac{2}{(q+1)nz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i \quad (53)$$

Pour simplifier la démonstration de la deuxième égalité de la proposition on va introduire le lemme suivant :

Lemme 1.2.1 :

$$H_n[I_n + (1-I_n)G_p] = \frac{2}{qnz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i - \frac{I_n}{n} \quad (54)$$

Preuve du lemme :

En utilisant les formules (7),(8) et (13) on obtient

$$H_n[I_n + (1-I_n)G_p] = \frac{q}{n} [1 - \frac{\mu_p}{z} + \frac{\mu_p}{z} \{1 - \sum_{i=1}^q [2(q-i)+1] \frac{y_i}{q^2 \mu_p} \}] \quad (55)$$

Par conséquent

$$H_n[I_n + (1-I_n)G_p] = \frac{q}{n} [1 - \frac{2}{z} \sum_{i=1}^q (q-i+1) \frac{y_i}{q^2} + \frac{1}{z} \sum_{i=1}^q \frac{y_i}{q^2}] \quad (56)$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$H_n[I_n + (1 - I_n)G_p] = \frac{2}{qnz} \left[\frac{q^2}{2}z - \sum_{i=1}^q (q - i + 1)y_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q y_i \right] \quad (57)$$

Il suffit de remarquer que $(\frac{q^2}{2}z = \frac{q(q+1)}{2}z - \frac{q}{2}z)$ pour avoir que :

$$H_n[I_n + (1 - I_n)G_p] = \frac{2}{qnz} \left[\sum_{i=1}^q (q - i + 1)z - \sum_{i=1}^q (q - i + 1)y_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q g_i \right] \quad (58)$$

Donc

$$H_n[I_n + (1 - I_n)G_p] = \frac{2}{qnz} \sum_{i=1}^q (q + 1 - i)g_i - \frac{I_n}{n} \quad (59)$$

■

Montrons maintenant la deuxième égalité de la proposition :

$$Ps_n(y, z) = \frac{2}{(q+1)nz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i = \frac{2q}{q(q+1)nz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i \quad (60)$$

En utilisant (5) on trouve :

$$Ps_n(y, z) = \frac{2}{qnz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i - \left[\frac{1}{n} - \frac{2}{q(q+1)nz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)y_i \right] \quad (61)$$

La simplification de (61) implique :

$$Ps_n(y, z) = \frac{2}{qnz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i - \frac{1}{n} \left[1 - \frac{1}{q(q+1)z} \sum_{i=1}^q \{2(q-i)+1\}y_i - \frac{\mu_p}{(q+1)z} \right] \quad (62)$$

Par conséquent (7) nous conduit à la formule suivante :

$$Ps_n(y, z) = \frac{2}{qnz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i - \frac{I_n}{n} - \frac{1}{n} \left[\frac{q\mu_p}{(q+1)z} - \frac{1}{q(q+1)z} \sum_{i=1}^q \{2(q-i)+1\}y_i \right] \quad (63)$$

D'après le lemme on obtient :

$$Ps_n(y, z) = H_n[I_n + (1 - I_n)G_p] - \frac{q\mu_p}{n(q+1)z} \left[1 - \frac{1}{q^2\mu_p} \sum_{i=1}^q \{2(q-i)+1\}y_i \right] \quad (64)$$

Grâce à (3), (7) et (13) on a :

$$Ps_n(y, z) = H_n[I_n + (1 - I_n)G_p] - \frac{H_n(1 - I_n)}{q+1} G_p \quad (65)$$

D'où

$$Ps_n(y, z) = H_n \left[I_n + \frac{q}{q+1} (1 - I_n) G_p \right] \quad (66)$$

■

En fait, cette mesure ne vérifie pas la propriété d'invariance par réplication, à cause du terme $\frac{q}{q+1}$. En effet :

$$H_{2n}((y, y), z) = \frac{2q}{2n} = H_n(y, z) \quad (67)$$

$$I_{2n}((y, y), z) = 1 - \frac{\mu_p((y, y), z)}{z} = 1 - \frac{\frac{1}{2q} \sum_{i=1}^q 2y_i}{z} = I_n(y, z) \quad (68)$$

Montrons d'abord que l'indice de Gini vérifie la propriété d'invariance par réplication :

d'après (13) on a :

$$G_p(y, z) = 1 - \frac{1}{q^2 \mu_p} \sum_{i=1}^q [2(q-i) + 1] y_i \quad (69)$$

Les revenus des pauvres sont ordonnés de 1 à q avec la pondération $2q - 2i + 1$ pour le revenu y_i de l'individu i . Dans le cas (y, y) (i.e la population est partagée en deux sous- groupes identiques). Le classement et la pondération vont changer de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2q-1 & 2q \\ 4q-1 & 4q-3 & 4q-5 & 4q-7 & 4q-9 & 4q-11 & \dots & 3 & 1 \end{array}$$

Mais on sait que le vrais classement déduit en tenant compte que

$$y_2 = y_1, y_4 = y_3, \dots, y_{2q} = y_{2q-1}$$

C'est à dire

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \dots & q \\ 8q-4 & 8q-12 & 8q-20 & \dots & 4 \\ 8q-8 \times 1 + 4 & 8q-8 \times 2 + 4 & 8q-8 \times 3 + 4 & \dots & 8q-8q + 4 \end{array}$$

On obtient donc :

$$\sum_{j=1}^{2q} [2(2q-j) + 1] y_j = \sum_{i=1}^q (8q - 8i + 4) y_i = 4 \sum_{i=1}^q [2(q-i) + 1] y_i \quad (70)$$

Il en résulte que

$$G_p((y, y), z) = 1 - \frac{1}{4q^2 \mu_p} \sum_{j=1}^{2q} [2(2q-j) + 1] y_j = 1 - \frac{1}{q^2 \mu_p} \sum_{i=1}^q [2(q-i) + 1] y_i \quad (71)$$

Donc

$$G_p((y, y), z) = G_p(y, z) \quad (72)$$

■

D'où

$$Ps_{2n}((y, y), z) = H_{2n}((y, y), z)[I_{2n}((y, y), z) + \frac{2q}{2q+1}\{1 - I_{2n}(y, z)\}G_p((y, y), z)] \quad (73)$$

D'après ce qui précède

$$\begin{aligned} Ps_{2n}((y, y), z) &= H_n(y, z)[I_n(y, z) + \frac{2q}{2q+1}\{1 - I_n(y, z)\}G_p(y, z)] \\ &\neq H_n(y, z)[I_n(y, z) + \frac{q}{q+1}\{1 - I_n(y, z)\}G_p(y, z)] = Ps_n(y, z) \end{aligned} \quad (74)$$

à cause du terme $\frac{q}{q+1}$. ■

Pour contourner cette difficulté on préfère la limite de cette mesure lorsque le nombre de pauvres est élevé :

$$S_n(y, z) = H_n[I_n + (1 - I_n)G_p] = \frac{2}{qnz} \sum_{i=1}^q (q+1-i)g_i - \frac{I_n}{n} \quad (75)$$

Cette mesure apparaît en fait comme le produit $H_n I_n$, corrigé du terme $H_n(1 - I_n)G_p$ afin de tenir compte de l'inégalité parmi les pauvres. En fait, l'inégalité a un poids d'autant plus important dans la mesure de SEN que le revenu moyen des pauvres est proche du seuil de pauvreté.

propriétés

- La mesure proposée par SEN ne vérifie pas l'axiome de transfert. Une distribution de revenu d'un pauvre vers un individu moins pauvre conduit parfois à une baisse de la pauvreté mesurée lorsque le transfert s'accompagne d'une réduction du nombre de pauvres. C'est le cas notamment quand la baisse de l'incidence de la pauvreté compense la hausse de son intensité ou de l'inégalité. Cette possibilité est illustrée dans l'exemple de Nicolas Ponty qui suit :

Exemple 1.2.4 *Dans une population de quatre habitants, la distribution initiale $y^1 = (180, 190, 200, 300)$ est caractérisée, par un seuil de pauvreté fixé à 205, par trois pauvres. La distribution $y^2 = (170, 190, 210, 300)$ est obtenue à partir de la distribution initiale par un transfert de 10 de l'individu le plus pauvre à l'individu le moins pauvre. Pour le seuil de pauvreté fixé à 205. Le nombre de pauvres diminue et compense la baisse du revenu moyen des deux pauvres qui restent. L'indice de SEN connaît également une baisse, de 0.087 à 0.083 (voir tableau(4)).*

Tableau(4) :Axiome de transfert et mesures de SEN et SHORROCKS

Seuil $z = 205$	SEN	SHORROCKS
$y_1 = (180, 190, 200, 300)$	0.087	0.10
$y_2 = (170, 190, 210, 300)$	0.083	0.11

Source : Nicolas Ponty (statéco no 90-91, Décembre 1998)

Shorrocks (1995) a montré comment cette violation de la propriété sur les transferts résulte de l'axiome N de normalisation et de l'hypothèse implicite de discontinuité. Il propose alors de postuler la continuité de la mesure, et de la rendre égale à l'intensité lorsque l'inégalité est nulle et que tous les individus sont pauvres. Il obtient alors pour mesure :

$$Sh_n(y, z) = \frac{1}{n^2 z} \sum_{i=1}^q (2n - 2i + 1)g_i \quad (76)$$

On peut vérifier sur l'exemple précédent(tableau 4) que la mesure de SHORROCKS vérifie l'axiome de transfert même lorsque le nombre de pauvres varie.

D'une manière générale soit la distribution initiale

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_j, \dots, y_q, \dots, y_n) \quad (77)$$

et la distribution finale \tilde{y} obtenu par le transfert $r, (r > 0)$ du pauvre j au pauvre $k (j < k \leq q)$ On a :

$$Sh_n(\tilde{y}, z) = \frac{1}{n^2 z} \left[\sum_{\substack{i \in \{1, 2, \dots, q\} \\ i \neq k}} [(2n - 2i + 1)g_i] \right. \\ \left. + (2n - 2j + 1)r + (2n - 2k + 1)\{g_k - r \vee 0\} \right] \quad (78)$$

En d'autre terme

$$Sh_n(\tilde{y}, z) = \frac{1}{n^2 z} \left[\sum_{i=1}^q [(2n - 2i + 1)g_i] - (2n - 2k + 1)g_k \right. \\ \left. + (2n - 2j + 1)r + (2n - 2k + 1)\{g_k - r \vee 0\} \right] \quad (79)$$

Par consequent

$$Sh_n(\tilde{y}, z) = \frac{1}{n^2 z} \left\{ \sum_{i=1}^q [(2n - 2i + 1)g_i] + 2(k - j)r + (2n - 2k + 1)[r - g_k + \{g_k - r \vee 0\}] \right\} \quad (80)$$

D'où

$$Sh_n(\tilde{y}, z) > \frac{1}{n^2 z} \sum_{i=1}^q (2n - 2i + 1)g_i = Sh_n(y, z) \quad (81)$$

■

- La propriété de transferts décroissants n'est pas vérifiée par les mesures de SEN et SHORROCKS. En effet, avec l'axiome C de classement ordinal de privation relative, l'impact d'un transfert entre un individu de rang i et un individu de rang $i+l$ ne dépend pas de la situation initiale de l'individu i ($\mu_i(y, z)$ est une fonction de i et non de y_i).
- Par construction, les mesures de SEN et SHORROCKS ne sont pas décomposables. En effet, par l'axiome C de classement ordinal des privations relatives, la pondération de l'écart relatif de pauvreté d'un individu dépend de la situation des autres individus. La composante de chaque individu à la mesure globale de pauvreté ne peut donc être dérivée indépendamment de la pauvreté des autres individus (si on reprend l'exemple(1.1.4) en divisant la population en deux sous-groupes $y^{2,1} = (170, 190)$ et $y^{2,2} = (210, 300)$ avec le même seuil de pauvreté. Un petit calcul peut montrer que les deux mesures ne sont pas décomposables).
- La propriété de cohérence par sous-groupe n'est pas non plus vérifiée par la mesure de SEN. Comme l'indique l'exemple(1.2.5) illustré au (tableau 5).

Exemple 1.2.5 *Supposons que la population totale est séparée en deux groupes A et B. Entre les deux périodes d'observation, la distribution des revenus ne se modifie que dans le groupe A. Avec la mesure de SEN, la baisse de revenu du plus "riche" des pauvres conduit à une augmentation de la pauvreté, malgré la faible hausse du revenu du plus pauvre. Cependant, appréciée sur l'ensemble de la population, la pauvreté diminue. En effet, l'amélioration de la situation du plus pauvre y est davantage prise en considération. Son revenu reste inférieur à celui de tous les pauvres, même ceux du groupe B, et sa pondération relative est donc plus importante qu'au sein du seul groupe A.*

Tableau (5) : Un exemple de non cohérence par sous-groupe de la mesure de SEN

Seuil $z = 205$	Période 1	Période 2
<i>Groupe A</i>		
$y^{A,1} = (150, 200, 260, 300)$	0.1131	0.1137
$y^{A,2} = (153, 190, 260, 300)$		
<i>Groupe B</i>		
$y^{B,1} = (180, 185, 250, 500)$	0.0684	0.0684
$y^{B,2} = y^{B,1}$		
<i>Population totale</i>	0.0542	0.0514

Source : Nicolas Ponty (statéco no 90-91, Août - décembre 1998)

2. Les mesures de FOSTER, GREER et TORBECKE (1984)

Foster, Greer et Thorbecke (1984) et Foster et Shorrocks (1991) ont proposé une famille de mesures, dite P_α . La spécification retenue permet à ces mesures de vérifier la propriété de décomposabilité :

Définition 1.2.7

$$P_\alpha^n(y, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q \left(\frac{g_i}{z}\right)^\alpha \quad (82)$$

avec $\alpha \geq 0$.

Proposition 1.2.2 :

i) P_α^n est décomposable.

ii) P_α^n vérifie strictement la propriété de monotonie et l'axiome de continuité pour $\alpha > 0$, celle de transfert et de transferts décroissants si $\alpha > 1$.

Preuves :

i)

Si on suppose que la population est divisée en k sous groupes de taille n_j , de nombre de pauvre q_j ($j \in \{1, \dots, k\}$) et $n = \sum_{j=1}^k n_j$, $q = \sum_{j=1}^k q_j$ alors :

$$P_\alpha^n(y, z) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^{q_j} \left(\frac{g_l}{z}\right)^\alpha = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} \left[\frac{1}{n_j} \sum_{l=1}^{q_j} \left(\frac{g_l}{z}\right)^\alpha \right] = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} P_\alpha^{n_j}(y^j, z) \quad (83)$$

ii)

—

*) Pour $\alpha > 0$; la mesure P_α est continue par rapport à z , puisqu'elle est une somme finie des fonctions continues par rapport à z .

**) Si $\alpha = 0$, alors

$$P_0^n = \frac{q(z)}{n} \quad (84)$$

Cette mesure est continue à gauche. Mais elle n'est pas continue à droite.

— Si $\alpha > 0$; la fonction $f(x) = (1 - \frac{x}{z})^\alpha$ pour $z > 0$, $x \in [0, z[$ est une fonction monotone décroissante par rapport à x . Donc P_α vérifie la propriété de monotonie pour $\alpha > 0$.

— Pour $\alpha > 1$

Soient

$$y = (y_1, \dots, y_i, \dots, y_j, \dots, y_q, \dots, y_n)$$

et

$$\tilde{y} = (y_1, \dots, y_i - r, \dots, y_j + r, \dots, y_q, \dots, y_n)$$

Alors

$$P_\alpha^n(\tilde{y}, z) - P_\alpha^n(y, z) = \frac{1}{n} \left\{ \left[\frac{g_i + r}{z} \right]^\alpha - \left\{ \left[\frac{g_i}{z} \right]^\alpha + \left[\frac{g_j}{z} \right]^\alpha \right\} + \left[\frac{\max(g_j - r, 0)}{z} \right]^\alpha \right\} \quad (85)$$

*) Si $r \geq g_j$ on obtient :

$$P_\alpha^n(\tilde{y}, z) - P_\alpha^n(y, z) = \frac{1}{n} \left\{ \left[\frac{g_i + r}{z} \right]^\alpha - \left\{ \left[\frac{g_i}{z} \right]^\alpha + \left[\frac{g_j}{z} \right]^\alpha \right\} \right\} \quad (86)$$

$$> 0 \quad (87)$$

**) Si $r < g_j$ alors :

$$P_\alpha^n(\tilde{y}, z) - P_\alpha^n(y, z) = \frac{1}{n} \left\{ \left\{ \left[\frac{g_i + r}{z} \right]^\alpha - \left[\frac{g_i}{z} \right]^\alpha \right\} - \left\{ \left[\frac{g_j}{z} \right]^\alpha - \left[\frac{g_j - r}{z} \right]^\alpha \right\} \right\} \quad (88)$$

Il suffit donc de remarquer que la fonction définie par

$$f_{(r,z)}(x) = \left[\frac{x+r}{z} \right]^\alpha - \left[\frac{x}{z} \right]^\alpha \quad (89)$$

est strictement croissante puisque

$$\frac{\partial f_{(r,z)}(x)}{\partial x} = \frac{\alpha}{z} \left[\left(\frac{x+r}{z} \right)^{\alpha-1} - \left(\frac{x}{z} \right)^{\alpha-1} \right] > 0; \quad \forall r, z > 0 \text{ et } \alpha > 1 \quad (90)$$

pour avoir que :

$$P_\alpha^n(\tilde{y}, z) - P_\alpha^n(y, z) > 0 \quad (91)$$

si $r > 0$, et $i < j \leq q$ et $\alpha > 1$.

– Encore pour $\alpha > 1$

$$\begin{aligned} P_n((y_1, \dots, y_i - r, \dots, y_k + r, \dots, y_n), z) - P_n((y_1, \dots, y_j - r, \dots, y_k + r, \dots, y_n), z) \\ = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{g_i + r}{z} \right)^\alpha - \left(\frac{g_j + r}{z} \right)^\alpha \right] = f_n(y_i, r) - f_n(y_j, r) \end{aligned} \quad (92)$$

Où

$$f_n(x, t) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{x-t}{z} \right)^\alpha \quad (93)$$

est strictement décroissante de taux strictement croissant par rapport à x ; strictement croissante par rapport à t . On peut constater de plus que la fonction de pondération

$$\mu_i(y, z) = \left(1 - \frac{y_i}{z} \right)^{\alpha-1} \quad (94)$$

est strictement décroissante par rapport à chaque composante y_i puisque $\alpha - 1 > 0$.

Par conséquent P_α^n vérifie l'axiome de transferts décroissants.

Le choix du paramètre α dépend du poids relatif qui est accordé aux individus les plus pauvres et peut être interprété comme un indice d'aversion à la pauvreté. En pratique, les mesures les plus fréquemment utilisées dans la littérature appliquée correspondent aux valeurs 0, 1 et 2 du paramètre α .

cas particuliers

*)

$$P_0^n(y, z) = H_n(y, z) = \frac{q}{n} \quad (95)$$

**)

$$P_1^n(y, z) = K_n(y, z) = H_n(y, z)I_n(y, z) \quad (96)$$

***)

$$P_2^n(y, z) = H_n(y, z)[I_n^2(y, z) + (1 - I_n(y, z))^2 C_p^2] \quad (97)$$

Où C_p est le coefficient de variation du revenu des pauvres dans la formule(11).

Pour les deux premiers cas, la preuve se voit facilement et pour la troisième il suffit d'écrire

$$P_2^n(y, z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^q \left(\frac{g_i}{z}\right)^2 = \frac{1}{nz^2} \sum_{i=1}^q (z - \mu_p + \mu_p - y_i)^2 \quad (98)$$

$$= \frac{1}{nz^2} \sum_{i=1}^q \{(z - \mu_p)^2 + 2(z - \mu_p)(\mu_p - y_i) + (y_i - \mu_p)^2\} \quad (99)$$

$$= \frac{1}{nz^2} \left[\sum_{i=1}^q (z - \mu_p)^2 + 2 \sum_{i=1}^q (z - \mu_p)(\mu_p - y_i) + \sum_{i=1}^q (y_i - \mu_p)^2 \right] \quad (100)$$

$$= \frac{1}{nz^2} [q(z - \mu_p)^2 + 0 + q\sigma_p^2] = \frac{q}{n} [I_n^2(y, z) + \left(\frac{\mu_p}{z}\right)^2 \left(\frac{\sigma_p}{\mu_p}\right)^2] \quad (101)$$

$$= H_n(y, z)[I_n^2(y, z) + (1 - I_n)^2 C_p^2] \quad (102)$$

■

On peut remarquer que la mesure $P_2^n(y, z)$, à l'instar de la mesure de SEN, propose une combinaison des mesures élémentaires de la pauvreté, l'inégalité étant évaluée ici à l'aide du coefficient de variation.

Les différentes mesures $P_\alpha^n(y, z)$ apportent en fait une information souvent complémentaire. Aussi est-il habituel d'analyser l'évaluation des trois mesures en même temps .

Résumé

Dans ce rapide panorama des indicateurs synthétiques de pauvreté monétaire, deux grands types de mesure ont été analysés, celle de SEN et la famille P_α proposée par FOSTER, GREER et THORBECKE. Seul le second type de mesures peut vérifier les principales propriétés (voir tableau 6). Toutefois, ces propriétés ne constituent pas des principes normatifs qui doivent être nécessairement vérifiés. Au contraire, l'approche axiomatique permet à l'utilisateur d'explicitier certaines propriétés qu'il souhaite voir vérifier par la mesure de pauvreté. Plutôt que de choisir définitivement entre deux mesures, il apparaît préférable de comprendre leur principales différences en rapport avec les objectifs de l'étude. Ainsi, s'il ne partage pas la conception de SEN sur la pauvreté et l'idée de discontinuité par rapport au seuil de pauvreté l'utilisateur pourra retenir une mesure P_α ou encore l'indicateur proposé par SHORROCKS. Le choix entre ces deux mesures dépend alors principalement de l'acceptation de la propriété de décomposabilité et de son intérêt pour l'étude envisagée.

Tableau (6) : Tableau synoptique des propriétés des principales mesures de pauvreté

P.M	S	F	IR	IA ou IM	M	T	TD	CS	D	C
$\bar{H}_n(y, z)$	oui	oui	oui	oui	non	non	non	oui	oui	non
$I_n(y, z)$	oui	oui	oui	oui	oui	non	non	non	non	non
$S_n(y, z)$	oui	oui	oui	oui	oui	non	non	non	non	non
$Sh_n(y, z)$	oui	oui	oui	oui	oui	oui	non	non	non	oui
$P_\alpha^n(y, z)$	oui	oui	oui	oui	Oui si $\alpha > 0$	Oui si $\alpha > 1$	Oui si $\alpha > 1$	oui	oui	Oui si $\alpha > 0$

P.M : la propriété de la mesure

S : symétrie

F : focalisation

IR : Invariance par réplication

IA ou IM : Invariance Additive ou multiplicative

M : monotonie

T : transfert

TD : transferts décroissants

CS : Cohérence par sous-groupe

D : Décomposabilité

C : continuité

1.3 La pauvreté des conditions de vie

1.3.1 Le concept de la pauvreté des conditions de vie

Il est important de signaler que la pauvreté ne se limite pas à une pénurie d'éléments nécessaires au bien-être matériel, mais aussi l'absence d'opportunités qui permettraient de bénéficier d'une existence tolérable. C'est également la privation des besoins élémentaires de santé et d'une éducation de base, ou sur le plan des capacités fonctionnelles élémentaires. A cet égard on voit la difficulté d'agréger un indicateur capable de traduire exactement la situation de pauvreté dans une société quelconque. Néanmoins, il existent des indicateurs agrégés résumant en majeure partie de ces concepts tels que l'indicateur du développement humaine (IDH), l'indicateur sexospécifique du développement humaine (ISDH), l'indicateur de la participation des femmes (IPF) et l'indicateur de pauvreté humaine (IPH).

Définition 1.3.1 : *Un indicateur de pauvreté des conditions de vie est un indicateur composite mesurant les déficits dans des domaines essentiels de l'existence humaine. Il se décompose généralement en quelque composantes simples ou composites selon les besoins de l'étude envisagée. Et on le note $P(\alpha)$ tel que :*

$$P(\alpha) = \left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \omega_i p_i^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (103)$$

Où $\omega_i (> 0)$ est la pondération de la composante $p_i (> 0)$ qui mesure la pauvreté dans la domaine i , $i = 1, 2, \dots, m$; $s = \sum_{i=1}^m \omega_i$ et α est le rang de cet indicateur ($\alpha > 0$).

1.3.2 Les propriétés de la mesure

Proposition 1.3.1

- $P^\alpha(\alpha)$ est le barycentre du système pondéré $(p_i^\alpha, \omega_i)_{1 \leq i \leq m}$.
- $\wedge_{1 \leq i \leq m} p_i \leq P(\alpha) \leq \vee_{1 \leq i \leq m} p_i$ (104)

Preuve :

Il suffit d'écrire

$$sP^\alpha(\alpha) = \left[\sum_{i=1}^m \omega_i p_i^\alpha \right] \quad (105)$$

Pour obtenir la première partie de la proposition et puis en déduire la deuxième formule.

Cette proposition nous permet d'interpréter $P(\alpha)$ comme étant le degré de pauvreté générale correspondant à une moyenne de rang α des taux de pauvreté dans chacune des dimensions considérées .

Proposition 1.3.2

i)

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} P(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq m} p_i \quad (106)$$

ii) $P(\alpha)$ est homogène de degré 1 en $(p_i)_{1 \leq i \leq m}$ i.e :

$$\forall \lambda \geq 0; \lambda P(\alpha) = \left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \omega_i (\lambda p_i)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (107)$$

iii) pour $\alpha > 0$

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial p_i} > 0 \quad (108)$$

De plus si $\alpha > 1$ alors

$$\frac{\partial^2 P(\alpha)}{\partial p_i^2} > 0 \quad (109)$$

iv) Pour $(p_i)_{1 \leq i \leq m}$ constants alors

$$\text{signe} \left[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \omega_i} \right] = \text{signe} [p_i - P(\alpha)] \quad (110)$$

Où $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ v) P est une fonction croissante par rapport à α i.e si $\alpha > \gamma > 0$ alors :

$$P(\alpha) > P(\gamma) \quad (111)$$

vi) $P(\alpha)$ est semi-décomposable selon les sous-groupes populaires. i.e si n_j la taille du sous-groupe j ; $j \in \{1, 2, \dots, k\}$; $n = \sum_{j=1}^k n_j$, et $P_j(\alpha)$ l'indicateur qui mesure la pauvreté des conditions de vie dans le sous-groupe j alors

$$\sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} P_j(\alpha) \geq P(\alpha) \quad (112)$$

Preuves

i) Par définition :

$$P(\alpha) = \left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \omega_i p_i^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}}$$

supposons que

$$\max_{1 \leq i \leq m} p_i = p_l$$

Alors

$$P(\alpha) \leq \left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \omega_i p_l^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} = p_l \quad (113)$$

De plus

$$\left[\frac{\omega_l}{s} p_l^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leq P(\alpha) \quad \forall \alpha > 0 \quad (114)$$

Si on passe à la limite quand α tend vers plus l'infinie on obtient :

$$p_l \leq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} P(\alpha) \quad (115)$$

En combinant (113) et (115), il en resulte :

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} P(\alpha) = \max_{1 \leq i \leq m} p_i = p_l \quad (116)$$

■

ii) Soit $\lambda \geq 0$

$$\left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \omega_i (\lambda p_i)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda \left[\frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \omega_i p_i^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha}} = \lambda P(\alpha) \quad (117)$$

■

iii) D'après la définition de $P(\alpha)$ nous avons :

$$sP^\alpha(\alpha) = \sum_{i=1}^m \omega_i p_i^\alpha \quad (118)$$

Alors

$$s\alpha P^{\alpha-1}(\alpha) \frac{\partial P(\alpha)}{\partial p_i} = \omega_i \alpha p_i^{\alpha-1} \quad (119)$$

Par consequent

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial p_i} = \frac{\omega_i}{s} \left[\frac{p_i}{P(\alpha)}\right]^{\alpha-1} > 0 \quad (120)$$

Si de plus $\alpha > 1$ alors grâce à (120) :

$$\frac{\partial^2 P(\alpha)}{\partial p_i^2} = \frac{\omega_i}{s} (\alpha - 1) \left\{ [P(\alpha) - \frac{\omega_i}{s} \left(\frac{p_i}{P(\alpha)}\right)^{\alpha-1} p_i] / P^2(\alpha) \right\} \left[\frac{p_i}{P(\alpha)}\right]^{\alpha-2} \quad (121)$$

$$= \frac{\omega_i}{s} (\alpha - 1) \frac{p_i^{\alpha-2}}{P^\alpha(\alpha)} \left\{ P(\alpha) - \frac{\omega_i}{s} \frac{p_i^\alpha}{P^{\alpha-1}(\alpha)} \right\} \quad (122)$$

$$= \frac{\omega_i}{s} (\alpha - 1) \frac{p_i^{\alpha-2}}{P^{2\alpha-1}(\alpha)} \left\{ P^\alpha(\alpha) - \frac{\omega_i}{s} p_i^\alpha \right\} \quad (123)$$

D'où

$$\frac{\partial^2 P(\alpha)}{\partial p_i^2} = \frac{\omega_i}{s} (\alpha - 1) \frac{p_i^{\alpha-2}}{P^{2\alpha-1}(\alpha)} \sum_{\substack{r \in \{1, \dots, m\} \\ r \neq i}} \frac{\omega_r}{s} p_r^\alpha > 0 \quad (124)$$

Pour $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $\alpha > 1$.

■

iv) Soit $(p_i)_{1 \leq i \leq m}$ des constants on a :

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \omega_i} = \frac{1}{\alpha} P^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(\alpha) \frac{1}{s^2} [s p_i^\alpha - s P^\alpha(\alpha)] \quad (125)$$

Alors

$$\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \omega_i} = \frac{1}{s\alpha} P^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}(\alpha) [p_i^\alpha - P^\alpha(\alpha)] \quad (126)$$

Par consequent

$$\text{signe}\left[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \omega_i}\right] = \text{signe}[p_i^\alpha - P^\alpha(\alpha)] \quad (127)$$

Puisque $\alpha > 0$

$$\text{signe}\left[\frac{\partial P(\alpha)}{\partial \omega_i}\right] = \text{signe}[p_i - P(\alpha)] \quad (128)$$

■

v) Soit $\alpha > \gamma > 0$. Par définition

$$P^\alpha(\alpha) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \omega_i p_i^\alpha \quad \text{et} \quad P^\gamma(\gamma) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^m \omega_i p_i^\gamma$$

Soit la fonction f strictement convexe définie sur \mathbb{R}_+^* par : $f(x) = x^{\alpha/\gamma}$, en effet ($f'(x) = \frac{\alpha}{\gamma} x^{\frac{\alpha}{\gamma}-1} > 0$ et $f''(x) = \frac{\alpha}{\gamma}(\frac{\alpha}{\gamma}-1)x^{\frac{\alpha}{\gamma}-2} > 0$) puisque ($\frac{\alpha}{\gamma} > 1$).

D'après l'inégalité de Jensen on a :

$$f(P^\gamma(\gamma)) < \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{s} f(p_i^\gamma) \quad (129)$$

Donc

$$[P^\gamma(\gamma)]^{\frac{\alpha}{\gamma}} < \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{s} (p_i^\gamma)^{\frac{\alpha}{\gamma}} \quad (130)$$

Par consequent

$$P(\gamma) < P(\alpha) \quad (131)$$

■

Corollaire 1.3.1 Si $\alpha > 1$ alors

$$P(\alpha) > \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{s} p_i = P(1) \quad (132)$$

vi) Soit $(p_{i,j})_{1 \leq i \leq m}$ les valeurs des indicateurs élémentaires de la pauvreté $(p_i)_{1 \leq i \leq m}$ pour le groupe j , dans lequel $j = 1, 2, \dots, k$. Nous avons alors :

$$P_j(\alpha) = \left[\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{s} p_{i,j}^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (133)$$

Grace à ii)

$$\frac{n_j}{n} P_j(\alpha) = \left[\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{s} \left(\frac{n_j}{n} p_{i,j} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (134)$$

Par consequent

$$\sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} P_j(\alpha) = \sum_{j=1}^k \left[\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{s} \left(\frac{n_j}{n} p_{i,j} \right)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} \quad (135)$$

D'après l'inégalité de Minkowski nous avons :

$$\sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} P_j(\alpha) \geq \left\{ \sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{s} \left[\sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} p_{i,j} \right]^\alpha \right\}^{\frac{1}{\alpha}} \quad (136)$$

En outre

$$\sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} p_{i,j} = p_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (137)$$

Il en resulte de (136) et (137) que :

$$\sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} P_j(\alpha) \geq \left[\sum_{i=1}^m \frac{\omega_i}{s} (p_i)^\alpha \right]^{\frac{1}{\alpha}} = P(\alpha) \quad (138)$$

■

commentaire

- La propriété ii) nous permet de constater que si l'incidence de pauvreté diminue de moitié dans chacune des dimensions (multipliée par un facteur $\lambda > 0$), la valeur de l'indicateur composite $P(\alpha)$ sera aussi diminuée de moitié (affectée par un coefficient λ multiplié par $P(\alpha)$).
- La propriété iii) est souhaitable pour que la valeur de notre indicateur agrégé augmente à un taux croissant dès lors qu'une quelconque valeur de p_i s'accroît.
- A partir de la propriété iv), on pourrait remarquer qu'un accroissement de la pondération des principaux composants augmente la valeur de l'indicateur composite tandis qu'une augmentation de la pondération des plus petits composants fasse diminuer $P(\alpha)$. Mais quel pourrait être l'effet d'un accroissement de la pondération d'un composant p_i situé à mi-chemin ? La réponse dépend de la relation entre p_i et $P(\alpha)$.

Chapitre 2

L'analyse de l'inégalité

2.1 Le concept de l'inégalité

Supposons que l'on ait réglé le problème de mesure du niveau de vie en choisissant un indicateur opérationnel, tel que le revenu. La structure de la répartition d'un tel indicateur au sein de la population est le cheval du bataille analytique qui pourrait guider toute évaluation social. En effet, le modèle sous-jacent à une répartition du bien-être peut être formulé en terme d'une loi de probabilité dont la formule est décrite par une fonction de densité. En pratique, il peut arriver que des segments de la distribution à laquelle on s'intéresse soient mal connus. Par exemple, les données sur les revenus faibles et élevés sont généralement peu fiables, voire absentes, dans de telles circonstances, il serait utile de pouvoir ajuster une fonction de fréquence sur la base des observations disponibles. Les deux fonctions de fréquence les plus usitées sont celles de Pareto et Gibrat. On a constaté que les ajustements sur la base de la distribution de Pareto n'étaient satisfaisants que pour les hauts revenus. Ceci a conduit au développement de la distribution de Gibrat basée sur l'hypothèse que la distribution du logarithme du revenu suit une loi de Gauss.

2.2 Les mesures de l'inégalité

De façon générale, l'analyse numérique de l'inégalité distributionnelle peut se baser soit sur des mesures comparatives, soit sur des indicateurs synthétiques résumant l'inégalité en un seul chiffre.

2.2.1 Les mesures comparatives

a) La comparaison des écarts :

On peut classer tous les individus de la population en fonction de leur revenu, et les regrouper en quintiles. Les écarts entre les revenus moyens des quintiles se

mesurent par les rapports entre leurs parts respectives (par exemple on pourrait comparer la part de 20% les plus pauvres à celle des 20% les plus riches).

b) La dominance stochastique :

Définition 2.2.1 Soient X et Y des variables aléatoires réelles prennent ses valeurs dans le même ensemble D et soient F, G leurs fonctions de répartition respectivement :

– On dit que X domine stochastiquement Y au premier ordre, si et seulement si :

$$F(t) \leq G(t) \quad \forall t \in D \quad (140)$$

– On dit que X domine stochastiquement Y au second ordre, si et seulement si :

$$\int_{(t < z) \cap D} F(t) dt \leq \int_{(t < z) \cap D} G(t) dt \quad \forall z \in D \quad (141)$$

Remarque 2.2.1 Si X domine Y au premier ordre alors X domine Y au second ordre.

c) La dominance au sens de Lorenz :

- courbe de Lorenz :

Définition 2.2.2 Soit X une variable aléatoire réelle positive de densité f et de fonction de répartition F . La distribution de Lorenz L est définie comme suit :

$$L : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$$

$$p \longmapsto L(p) = \frac{1}{E(X)} \int_0^p F^{-1}(t) dt \quad (142)$$

où $E(X)$ désigne l'espérance mathématique de X .

Proposition 2.2.1

$$L(p) = \frac{\int_0^x y f(y) dy}{\int_0^{+\infty} y f(y) dy} \quad (143)$$

Où $x = F^{-1}(p)$.

Preuve :

Il suffit d'utiliser un changement de variable ($y = F^{-1}(t)$) :

$$F^{-1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} y f(y) dy = E(X) \quad (144)$$

D'où le resultat.

Remarque 2.2.2 En supposant que les unités de revenu aient été préalablement classées par ordre croissant du revenu, Y , on obtient une nouvelle définition de la courbe de Lorenz :

$$L(p)^1 = \frac{1}{N\mu} \sum_{i=1}^{[Np]} y_i \quad \forall p \in [0, 1] \quad (145)$$

Où N est le nombre d'individus dans la population totale, μ le revenu moyen de la population et y_i le revenu de l'individu i .

Cette remarque nous permet de constater que si p est une proportion de la population totale recevant une part, $L(p)$, du revenu total alors :

$$L(p) = p \frac{\mu_p}{\mu} \quad (146)$$

Où μ_p est le revenu moyen des individus ayant un revenu inférieur ou égal à $y_{[Np]}$. En d'autre terme, le revenu moyen allant à 100p% de la population la plus pauvre est égal à :

$$\mu_p = \mu \frac{L(p)}{p} \quad (147)$$

Pour rendre les choses plus claires construisons l'exemple suivant :

Exemple 2.2.1 Soit une population de deux individus et R le revenu total à distribuer. considérons les distributions suivantes ; $y_1 = (R/4, 3R/4)$, $y_2 = (0, R)$ et la distribution idéale $y_3 = (R/2, R/2)$.

Les fonctions associées à ces distributions sont représentées dans le tableau(7) suivant :

Tableau (7) :

Les valeurs possibles des $(y_i)_{1 \leq i \leq 3}$	F_1 associée à y_1	F_2 associée à y_2	F_3 associée à y_3
0	0	0.5	0
R /4	0.5	0.5	0
R/2	0.5	0.5	1
3R/4	1	0.5	1
R	1	1	1

¹Par ailleurs on note aussi que la courbe de Lorenz généralisée se définit comme suit :

$$L(\mu, p) = \mu L(p) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{[Np]} y_k \quad (*)$$

Où $[t]$ désigne la partie entière de t .

Les distributions de Lorenz associées sont représentée dans le tableau (8) qui suit :

Tableau (8) :

Les valeurs possibles des $(F_i)_{1 \leq i \leq 3}$	Les valeurs de L_1 associées à y_1	Les valeurs de L_2 associées à y_2	Les valeurs de L_3 associées à y_3
0	0	0	0
0.5	0.25	0	0.5
1	1	1	1

Les courbes de Lorenz associées aux trois cas sont illustrées graphiquement (voir la figure 3.1 dans l'annexe)

Définition 2.2.3 Soit L_X et L_Y les courbes de Lorenz associées aux variables X et Y , on dit que X domine Y au sens de Lorenz si et seulement si :

$$L_X(u) \leq L_Y(u) \quad \forall u \geq 0 \quad (148)$$

2.2.2 Une approche axiomatique de la mesure syntétique de l'inégalité

Définition 2.2.4 Soit Ω un ensemble, $car(\Omega)$ désigne le nombre d'éléments de Ω , et y un vecteur de $\mathbb{R}^{car(\Omega)}$. Une mesure syntétique de l'inégalité sur Ω est une application $I_{car(\Omega)}$ de $\mathbb{R}^{car(\Omega)}$ dans \mathbb{R} .

$$I_{car(\Omega)} : \mathbb{R}^{car(\Omega)} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$y \longmapsto I_{car(\Omega)}(y) \quad (149)$$

A l'instar de ce qu'on a vu dans le premier chapitre. Une mesure syntétique de l'inégalité doit vérifier quelques principes axiomes.

Avant de présenter ces axiomes, on suppose que le vecteur $y = (y_j)_{j \in J}$ - où J est un intervalle de \mathbb{N}^* de la forme $\{1, \dots, n\}$ (par exemple)- est le vecteur des revenus de la population de n individus, et I_n une telle mesure syntétique de l'inégalité dans cette population.

1) Principe de symétrie :

Soit σ une permutation de J dans J alors :

$$I_n([y_j]_{j \in J}) = I_n([y_{\sigma(j)}]_{j \in J}) \quad (150)$$

C'est à dire que la mesure de l'inégalité est independante de toute caracteristiques autre que le revenu.

2)Principe de population (Dalton, 1920) :

Le melange de deux distributions identiques ne devrait pas modifier l'inégalité. i.e :

$$I_{2n}[(y, y)] = I_n(y) \quad (151)$$

3)Principe d'invariance multiplicative :

Si le revenu de tous les individus change de la même proportion, l'inégalité devrait rester constante. i.e :

$$I_n(\lambda y) = I_n(y) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad (152)$$

4)Principe de transfert de Pigou-Dalton (Pigou, 1912 ; Dalton, 1920) :

Un transfert de revenu d'une personne pauvre vers une personne riche devrait augmenter l'inégalité(ou au moins ne pas la faire baisser)et un transfert de revenu d'une personne riche vers une personne pauvre devrait reduire l'inégalité (ou au moins ne pas l'augmeter). En d'autre terme :

$$I_n(\dots, y_i, \dots, y_j, \dots) \geq I_n(\dots, y_i - r, \dots, y_j + r, \dots) \quad (153)$$

Pour $y_i < y_j$ et $r \in \mathbb{R}_+$.

5)Principe de décomposabilité :

Définition 2.2.5 *Supposons qu'on a une population formée de k groupes, et I désigne une mesure de l'inégalité dans cette population, on dit que I vérifie le principe de décomposabilité si :*

$$I = I_B + I_W \quad (154)$$

telles que :

I_B représente la mesure entre les groupes en considerant que dans chaque groupe chaque personne à un revenu égal à la moyenne des revenus de cet groupe.

I_W mesure l'inégalité aux seins des groupes étudiés :

$$I_W = \sum_{j=1}^k \omega_j I_W^j \quad (155)$$

où I_W^j mesure l'inégalité au sein du groupes j ; $\omega_j = \nu_j s_j$ est le produit de la proportion du groupe j dans la population totale s_j par la part du revenu total allant au même groupe.

Ce principe est consideré comme souhaitable. Néanmoins il ne constitue pas un principe sinekwanon.

2.2.3 Les indicateurs synthétiques de l'inégalité :

a) Le coefficient de Gini :

Définition 2.2.6 *Le coefficient de Gini est égal au rapport entre la superficie comprise entre la diagonale (courbe de Lorenz égalitaire) et la courbe de Lorenz de la distribution étudiée, et l'aire totale sous la diagonale. soit :*

$$G = \frac{\int_0^1 [p - L(p)] dp}{\int_0^1 p dp} \quad (156)$$

Remarque 2.2.3

$$G = 2 \int_0^1 [p - L(p)] dp = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp \quad (157)$$

La formule (157) conduit à construire une structure analytique des courbes de Lorenz du genre présenté à la figure 1. En effet ces courbes sont formées par une combinaison de deux fonctions affines. Le segment de droite allant de l'origine au coude a pour équation :

$$L(p) = ap \quad 0 \leq p \leq h \quad (158)$$

Où h est la proportion d'individus ayant un revenu inférieur à une somme donnée z . Par ailleurs, le deuxième segment de droite composant ce genre de courbe va du coude au point (1,1). Par conséquent, son expression analytique est de la forme :

$$L(p) = bp + (1 - b) \quad h < p \leq 1 \quad (159)$$

Il en résulte

$$G = 1 - 2 \left[\int_0^h ap dp + \int_h^1 \{bp + (1 - b)\} dp \right] \quad (160)$$

Donc :

$$G = 1 - [ah^2 + b(1 - h^2) + 2(1 - b)(1 - h)] \quad (161)$$

D'après (146) on a :

$$a = \frac{\mu_1}{\mu} \quad \text{et} \quad b = \frac{\mu_2}{\mu} \quad (162)$$

Par conséquent, $l_1 = ah$ et $l_2 = b(1 - h)$ les parts du revenu allant aux premier et second groupe, respectivement. D'où

$$G = 1 - (1 - h + l_1) = h - l_1 = l_2 - (1 - h) \quad (163)$$

Remarque 2.2.4 : *Ce résultat reste vrai dans le cas où la population est subdivisée en deux groupes exclusifs sur la base d'un niveau de revenu.*

Nous illustrons comment calculer le coefficient de Gini à partir de la formule (163) dans notre exemple en considérant que les deux individus représentent deux groupes distincts.

(9) :

Les cas	h	l_1	l_2	G
No 1	0.5	0.25	0.75	0.25
No 2	0.5	0	1	0.5
No 3	0.5	0.5	0.5	0

Proposition 2.2.2 :

$$G = \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |y - x| f(y) f(x) dy dx \quad (164)$$

Où $\mu = E(x)$

Preuve de la proposition :

D'après (157)

$$G = 1 - \int_0^1 L(p) dp - \int_0^1 L(p) dp \quad (165)$$

En utilisant les règles d'intégration par partie nous obtiendrons :

$$G = \int_0^1 p \frac{\partial L(p)}{\partial p} dp - \int_0^1 L(p) dp \quad (166)$$

Il suffit de remarquer que $1 = \int_0^1 \frac{\partial L(p)}{\partial p} dp = \int_0^1 dp$ pour avoir que :

$$G = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 2p \frac{\partial L(p)}{\partial p} dp - \int_0^1 \frac{\partial L(p)}{\partial p} dp + \int_0^1 dp - 2 \int_0^1 L(p) dp \right\} \quad (167)$$

Par conséquent

$$G = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^1 [(2p - 1) \frac{\partial L(p)}{\partial p} + 1 - 2L(p)] dp \right\} \quad (168)$$

nous invoquons maintenant la formule (142) et le changement de variable $y = F^{-1}(t)$, $F^{-1}(0) = 0$, $F^{-1}(p) = x$, $F^{-1}(1) = +\infty$. Par conséquent :

$$p = F(x) = \int_0^x f(y) dy \quad (169)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f(x) \quad (170)$$

$$\frac{\partial L(p)}{\partial p} = \frac{\partial L(p)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{xf(x)}{E(X)} \frac{1}{f(x)} = \frac{x}{\mu} \quad (171)$$

où $\mu = E(X)$.

D'après ce qui précède :

$$G = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{\mu} [2 \int_0^x f(y) dy - 1] + [1 - \frac{2}{\mu} \int_0^x yf(y) dy] \right) f(x) dx \right\} \quad (172)$$

Ce qui revient à dire que :

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\mu} \left\{ \int_0^{+\infty} \left([x \int_0^x f(y) dy - x \int_x^{+\infty} f(y) dy] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + [\int_x^{+\infty} yf(y) dy - \int_0^x yf(y) dy] \right) f(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (173)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} G &= \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} \left\{ [\int_0^x (xf(y) - yf(y)) dy] \right. \\ &\quad \left. + [\int_x^{+\infty} (yf(y) - xf(y)) dy] \right\} f(x) dx \end{aligned} \quad (174)$$

Alors

$$G = \frac{1}{2\mu} \left\{ \int_0^{+\infty} \int_0^x (x-y)f(y)f(x) dy dx + \int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} (y-x)f(y)f(x) dy dx \right\} \quad (175)$$

Donc

$$G = \frac{1}{2\mu} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} |x-y|f(x)f(y) dx dy \quad (176)$$

■

Corollaire 2.2.1 (Formule de Morrisson, 1986)

Soit une population de taille n , μ son revenu moyen, et y_i, y_j les revenus des individus i, j . Alors :

$$G_n = \frac{1}{2n^2\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j| \quad (177)$$

Remarque 2.2.5 Le calcul de la formule (177) est plus aisé si l'on organise les informations en une matrice carrée ($n \times n$) dont l'élément (i, j) mesure la valeur absolue de la différence entre le revenu de la ligne i et celui de la colonne j .

Pour illustrer ce principe on garde notre exemple et on recalcule de nouveau l'indice de Gini

Tableau (10) :

$i \setminus j$	r_1	r_2	$s_i = \sum_k r_i - r_k $
r_1	0	$ r_1 - r_2 $	$ r_1 - r_2 $
r_2	$ r_2 - r_1 $	0	$ r_2 - r_1 $
$s^j = \sum_k r_k - r_j $	$ r_2 - r_1 $	$ r_2 - r_1 $	$S = \sum_i s_i = \sum_j s^j = 2 r_2 - r_1 $

CAS no 1 :

$$G_2^1 = \frac{1}{2 \times 4 \times \frac{R}{2}} \times S_1 = \frac{R}{4R} = 0.25 \quad (178)$$

CAS no 2 :

$$G_2^2 = \frac{1}{2 \times 4 \times \frac{R}{2}} \times S_2 = \frac{2R}{4R} = 0.5 \quad (179)$$

CAS no 3 :

$$G_2^3 = 0 \quad (180)$$

Proposition 2.2.3 : Lorsque n est suffisamment grand et en supposant que les unités de revenu ont été classées par ordre croissant du niveau de revenu, la formule (177) est équivalente à la suivante :

$$G_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2 \mu} \sum_{i=1}^n [2(n-i) + 1] \quad (181)$$

Preuve :

D'après la formule (177) nous avons :

$$G_n = \frac{1}{2n^2 \mu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |y_i - y_j|$$

En utilisant le classement des unités de revenus nous pourrions écrire :

$$G_n = \frac{1}{2n^2 \mu} \sum_{i=1}^n [2 \sum_{j=i+1}^n (y_j - y_i)] \quad (182)$$

En d'autre terme :

$$G_n = \frac{1}{n^2 \mu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n (y_j - y_i) \quad (183)$$

$$G_n = \frac{1}{n^2 \mu} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n y_j - \sum_{j=1}^i y_j - (n-i)y_i \right] \right\} \quad (184)$$

Alors

$$G_n = \frac{1}{n^2 \mu} \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j - \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i y_j + \sum_{i=1}^n (n-i)y_i \right] \right\} \quad (185)$$

Il suffit de constater que :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i y_j = \sum_{i=1}^n (n-i+1)y_i \quad (186)$$

pour avoir que :

$$G_n = \frac{1}{n^2\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j + \frac{1}{n^2\mu} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{2}{n^2\mu} \sum_{i=1}^n (n-i+1)y_i \quad (187)$$

Pour n assez grand, le théorème central limité nous donne :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \longrightarrow \mu \quad (188)$$

D'où

$$\begin{cases} \frac{1}{n^2\mu} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n y_j & \longrightarrow 1 \\ \frac{1}{n^2\mu} \sum_{i=1}^n y_i & \longrightarrow \frac{1}{n} \end{cases} \quad (189)$$

Il en résulte que :

$$G_n = 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2\mu} [ny_1 + (n-1)y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n] \quad (190)$$

■

Proposition 2.2.4 : *Le coefficient de Gini se calcule à partir de la covariance entre les niveaux de revenus et leurs rangs.*

$$G = \frac{2}{\mu} \text{cov}(Y, F(Y)) \quad (191)$$

Démonstration :

D'après la formule (157) :

$$G = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp \quad (192)$$

Les règles d'intégration par partie nous conduisent à

$$G = 1 - 2 \left\{ 1 - \int_0^1 p \frac{\partial L(p)}{\partial p} dp \right\} \quad (193)$$

Invoquons les formules (169) et (171) nous allons trouver :

$$G = \frac{2}{\mu} \int_0^{+\infty} yF(y)f(y)dy - 1 \quad (194)$$

Par conséquent

$$G = \frac{2}{\mu} [\text{cov}(Y, F(Y)) + \mu E(F(Y))] - 1 \quad (195)$$

D'où

$$G = \frac{2}{\mu} \text{cov}(Y, F(Y)) \quad (196)$$

■

Pour illustrer ce dernier resultat, recalculons l'indice de Gini :

tableau (11) : indice de Gini et covariances

	Cas no 1	Cas no 2	Cas no 3
Covariance	$\frac{R}{16}$	$\frac{R}{8}$	0
Coefficient de Gini	0.25	0.5	0

b) L'indice de concentration

-courbe de concentration

Définition 2.2.7 Soit X une variable aléatoire réelle positive et ϕ une fonction. La courbe de concentration de la variable $Y = \phi(X)$ est définie comme suit :

$$K_Y^X(p) = \int_0^x \frac{yf(t)}{\mu_Y} dt = \int_0^x \frac{\phi(t)dF(t)}{E(\phi(X))} \quad (197)$$

Où $x = F^{-1}(p)$

Définition 2.2.8 Le coefficient de concentration C_Y^X d'une variable Y , fonction de X se définit de la manière suivante :

$$C_Y^X = 2 \int_0^1 [p - K_Y^X(p)] dp \quad (198)$$

Proposition 2.2.5

$$C_Y^X = 1 - 2 \int_0^1 K_Y^X(p) dp = \frac{2\text{cov}(Y, F(X))}{\mu_Y} \quad (199)$$

preuve :

la défintion de C_Y^X nous donne directement :

$$C_Y^X = 2 \int_0^1 p dp - 2 \int_0^1 K_Y^X(p) dp = 1 - 2 \int_0^1 K_Y^X(p) dp \quad (200)$$

En outre

$$\frac{\partial K_Y^X(p)}{\partial p} = \frac{\partial K_Y^X(p)}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\phi(x)}{\mu_Y} = \frac{y}{\mu_Y} \quad (201)$$

par conséquent

$$C_Y^X = 1 - 2\left[1 - \int_0^1 p \frac{\partial K_Y^X(p)}{\partial p} dp\right] = -2\left[\frac{1}{2} - \int_0^1 F(x) \frac{y}{\mu_Y} dF(x)\right] \quad (202)$$

i.e

$$C_Y^X = -2\left[\frac{1}{2} - \left(\frac{\text{cov}(Y, F(X))}{\mu_Y} + \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{2\text{cov}(Y, F(X))}{\mu_Y} \quad (203)$$

■

Remarque 2.2.6

$$C_Y^X = {}^2R(X, Y)G_Y \quad (204)$$

Où

$$R(X, Y) = \frac{\text{cov}(Y, F(X))}{\text{cov}(Y, F(Y))} \quad (205)$$

Et G_Y le coefficient de Gini de la variable Y .

Remarque 2.2.7

$$G_X = C_X^X \quad (206)$$

c) L'indicateur de Theil

Définition 2.2.9 L'indicateur de Theil se définit comme :

$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\bar{y}} \log \frac{y_i}{\bar{y}} \quad (207)$$

Où $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$.

²Le coefficient $R(X, Y)$ se définit aussi comme :

$$R(X, Y) = \frac{\text{cov}(Y, F(X))/\text{var}(Y)}{\text{cov}(Y, F(Y))/\text{var}(Y)}$$

Cette expression montre que le coefficient peut s'obtenir en divisant la pente de la régression de $F(X)$ en Y par celle de la régression de $F(Y)$ en Y .

d) La classe d'indicateurs d'entropie généralisée

Définition 2.2.10 La structure de ces indicateurs se définit par l'expression suivante :

$$E_n^\theta = \frac{1}{\theta^2 - \theta} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\bar{y}} \right)^\theta - 1 \right] \quad (208)$$

Cette classe d'indicateurs comme le nom indique est basé sur le concept d'*entropie* qui est une mesure de l'état de désordre d'un système et augmente au fur et à mesure que le système approche un état de désordre accru³.

Proposition 2.2.6

– Si $\theta = 0$ alors

$$E_n^0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\bar{y}}{y_i}\right) \quad (209)$$

– Si $\theta = 1$ alors on obtient l'indicateur de Theil :

$$E_n^1 = T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{\bar{y}} \log \frac{y_i}{\bar{y}} \quad (210)$$

– Si $\theta = 2$ alors on obtient la moitié du carré du coefficient de variation. i.e

$$E_n^2 = \frac{1}{2n\bar{y}^2} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{Cv^2}{2} \quad (211)$$

Preuve :

Pour les deux premiers cas il suffit de définir les fonctions suivantes :

$$f_i(x) = e^{[x \log(\frac{y_i}{\bar{y}})]} \quad (212)$$

et

$$g_i(x) = \frac{y_i}{\bar{y}} e^{[(x-1) \log(\frac{y_i}{\bar{y}})]} \quad (213)$$

pour avoir :

$$E_n^\theta = \frac{1}{n(\theta - 1)} \sum_{i=1}^n \left[\frac{f_i(\theta) - f_i(0)}{\theta} \right] \quad (214)$$

$$E_n^\theta = \frac{1}{n\theta} \sum_{i=1}^n \left[\frac{g_i(\theta) - g_i(1)}{\theta - 1} \right] \quad (215)$$

Le développement de Taylor du premier ordre au voisinage de zero appliqué à la formule (214) nous permet d'écrire :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} E_n^\theta = E_n^0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log\left(\frac{\bar{y}}{y_i}\right) \quad (216)$$

³Pour plus de détail voir par exemple (Sen 1997).

Et le développement de Taylor du premier ordre au voisinage de 1 appliqué à la formule (215) nous donne :

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} E_n^\theta = E_n^1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right) \log \left(\frac{y_i}{\bar{y}}\right) \quad (217)$$

■

Le dernier cas découle de la définition du coefficient de variation

$$Cv = \frac{1}{\bar{y}} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (218)$$

Avant de terminer cette section, on va examiner les principes vérifiés par l'indicateur de Gini.

Il est aisé de constater que cet indicateur vérifie le premier et le troisième axiome, pour le deuxième, il suffit de refaire la même procédure que nous avons exécutée au preuve de la formule (72) pour G_p dans le premier chapitre.

Pour le quatrième axiome :

Désignons par \tilde{y} le vecteur des revenus individuels après le transfert d'un montant r de l'individu i à l'individu j ($i \leq j$) et y le vecteur des revenus individuels triés par ordre croissant avant le transfert. Supposons de plus que p est le rang de $y_i - r$ et q le rang de $y_j + r$ après le transfert ($p \leq i$ et $j \leq q$). D'après (183) :

– Si $i = j$ ou $r = 0$ rien à changer :

$$G_n(\tilde{y}) = G_n(y)$$

– Si $i < j$ et $r > 0$ alors $p < q$ et :

$$G_n(\tilde{y}) = \frac{1}{n^2 \mu} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=k+1}^n (y_l - y_k) + (n - p + 1)r - (n - q)r \right] \quad (219)$$

$$G_n(\tilde{y}) = \frac{1}{n^2 \mu} \left[\sum_{k=1}^n \sum_{l=k+1}^n (y_l - y_k) + (q - p + 1)r \right] \quad (220)$$

D'où

$$G_n(\tilde{y}) > G_n(y)$$

Par conséquent

$$G_n(\tilde{y}) \geq G_n(y) \quad (221)$$

■

En fin nous allons consacrer pour le dernier axiome une section complète.

2.2.4 La décomposition du coefficient de Gini

Exemple 2.2.2 Dans ce contexte, considérons une répartition du revenu représentée par une courbe de Lorenz notée $L(p)$. Formons deux sous-groupes exhaustifs et mutuellement exclusifs sur la base d'un niveau de revenu z (par exemple les pauvres et les riches). On supposera que le premier sous-groupe représente une proportion s de la population totale et reçoit une proportion ν du revenu total. Pour analyser la décomposition du coefficient de Gini, nous comparons la distribution initiale à celle que l'on obtiendrait en donnant à chacun le revenu moyen de son groupe. Nous représentons cette dernière répartition par la courbe de Lorenz $L_C(p)$. Il est déjà vu que cette courbe est une combinaison des deux courbes (158) et (159). En termes de ces courbes de Lorenz et sur la base de l'équation (157), le coefficient de Gini s'écrit comme suit :

$$G = 2 \int_0^1 [p - L_C(p)] dp + 2 \int_0^1 [L_C(p) - L(p)] dp \quad (222)$$

Par définition, le premier terme mesure l'inégalité entre les deux groupes et sa valeur est donnée par l'équation (163). Il nous faut maintenant trouver une expression plus analytique pour le deuxième terme qui mesure l'inégalité au sein des deux groupes. Appelons les deux mesures respectivement G_B et G_W . Par conséquent, (222) s'écrit tout simplement comme suit :

$$G = G_B + G_W \quad (223)$$

Alors

$$G_W = G_W^1 + G_W^2 \quad (224)$$

Où

$$G_W^1 = 2 \int_0^s L_C(p) dp - 2 \int_0^s L(p) dp \quad (225)$$

Et

$$G_W^2 = 2 \int_s^1 L_C(p) dp - 2 \int_s^1 L(p) dp \quad (226)$$

Munis de l'expérience dans le preuve du (163), nous procédons comme suit :

$$G_W^1 = \frac{\mu_1}{\mu} s^2 - 2 \frac{\mu_1}{\mu} s^2 + \frac{2}{\mu} \int_0^z F(y) y f(y) dy \quad (227)$$

En simplifiant et en mettant $\frac{2s^2}{\mu}$ en facteur, l'équation (227) devient :

$$G_W^1 = \frac{2s^2}{\mu} \left[\int_0^z \frac{F(y)}{s} y \frac{f(y)}{s} dy - \frac{1}{2} \mu_1 \right] = \frac{2s^2}{\mu} \text{cov}_1(F_1(Y), Y) \quad (228)$$

Ce résultat se fonde sur l'interprétation de $F_1(y) = \frac{F(y)}{s}$ comme fonction de répartition au sein du premier groupe. Notons au passage que pour le deuxième

groupe, cette fonction est $F_2(y) = \frac{[F(y)-s]}{1-s}$. Par ailleurs, la covariance entre le revenu et son rang au sein de ce groupe est une fonction du coefficient de Gini pour ce groupe (voir 191). En particulier, on a :

$$\text{cov}_1(F_1(Y), Y) = \frac{\mu_1 G_1}{2} \quad (229)$$

Après substitution et simplification, nous obtenons :

$$G_W^1 = \frac{s^2 \mu_1}{\mu} G_1 = s\nu G_1 = \omega_1 G_1 \quad (230)$$

Pour le deuxième groupe dont les revenus sont supérieurs à z , nous avons :

$$\begin{aligned} G_W^2 &= [\frac{\mu_2}{\mu}(1-s^2) + 2(1-\frac{\mu_2}{\mu})(1-s)] \\ &+ [2\{\frac{\mu_2}{\mu}s^2 + (1-\frac{\mu_2}{\mu})s - 1\} + \frac{2}{\mu} \int_z^{+\infty} F(y)yf(y)dy] \end{aligned} \quad (231)$$

Ce qui est équivalent à :

$$G_W^2 = \frac{2}{\mu} [\int_z^{+\infty} F(y)yf(y)dy - \frac{1}{2}\mu_2(1-s^2)] \quad (232)$$

En outre

$$F(y) = F_2(y) - sF_2(y) + s \quad (233)$$

En mettant $(1-s)$ en facteur, on obtient :

$$\begin{aligned} G_W^2 &= \frac{2(1-s)}{\mu} \{[\int_z^{+\infty} F_2(y)y dF_2(y) - \frac{1}{2}\mu_2] \\ &- s[\int_z^{+\infty} F_2(y)y dF_2(y) - \int_z^{+\infty} y dF_2(y) + \frac{1}{2}\mu_2]\} \end{aligned} \quad (234)$$

Par conséquent :

$$G_W^2 = \frac{2(1-s)^2}{\mu} \text{cov}_2(F_2(Y), Y) = (1-s)\nu_2 G_2 = \omega_2 G_2 \quad (235)$$

En fin, nous sommes en mesure d'exprimer le coefficient de Gini en terme de ses composantes comme suit :

$$G = (s - \nu) + (\omega_1 G_1 + \omega_2 G_2) = G_B + G_W \quad (236)$$

Ce cas particulier illustre une décomposition exacte du coefficient de Gini en deux termes. Le premier est une mesure de l'inégalité intergroupe. Le deuxième représente une mesure de l'inégalité intragroupe.

De façon générale, en supposant que la population Ω se subdivise en n sous-groupes, Lambert et Aronson(1993) montrent que le coefficient de Gini se décompose suivant le theoreme si dessous :

Théorème 2.2.1

$$G = G_B + \sum_{i=1}^n \omega_i G_i + R \quad (237)$$

où G est le coefficient de Gini pour l'ensemble de la population, G_B le coefficient de Gini qui mesure l'inégalité entre les sous-groupes. Ce coefficient s'obtient en appliquant la formule de Gini après avoir remplacé chaque revenu par la moyenne de son sous-groupe. $\omega_i = s_i \nu_i$, telles que s_i désigne la fraction de la population du groupe i , ν_i la part du revenu total allant au groupe i , G_i est le coefficient de Gini mesurant l'inégalité au sein du groupe i , et R est un résidu qui s'annule lorsque les intervalles des revenus des sous-groupes sont disjoints.

Preuve du théorème :

Supposons que x_1, x_2, \dots, x_N les revenus individuels de la population Ω , μ le revenu moyen, et que Ω se subdivise en n sous-groupes Ω_k contient N_k individus, de revenu moyen $\mu_k (k = 1, 2, \dots, n)$.

Par conséquent, le revenu total à distribuer est égal à $N\mu = \sum_k N_k \mu_k$.

On sait de plus que :

$$G = 2 \int_0^1 [p - L(p)] dp$$

Procédons comme suit : Considérons maintenant le cas où chacun recevrait plutôt la moyenne de son groupe μ_k . En supposant que les moyennes de groupes sont classées de la plus petite à la plus grande ($\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$), cette distribution peut se représenter par la courbe de Lorenz $L_B(p)$. Il est à noter que cette répartition ne fait intervenir que les inégalités inter-groupes. Pour introduire les inégalités au sein de chaque groupe, on réattribue à chaque individu son revenu réel et on reclasse les individus au sein de chaque groupe par ordre croissant de revenu. Cette opération nous conduit à une courbe de concentration que nous notons par $K_C(p)$. La courbe de Lorenz $L(p)$ représentant la distribution initiale s'obtient finalement en reclassant tous les individus par ordre croissant du revenu (**voir annexe (figure 3.2)**).

Soient les aires définies par :

$$A_B = 2 \int_0^1 [p - L_B(p)] dp \quad (238)$$

$$A_W = 2 \int_0^1 [L_B(p) - K_C(p)] dp \quad (239)$$

$$A_O = 2 \int_0^1 [K_C(p) - L(p)] dp \quad (240)$$

On peut constater aisément que :

$$G = A_B + A_W + A_O \quad (241)$$

Pour illustrer notre idée construisons voir la figure 3.3 (**annexe**)

– Par construction

$$A_B = G_B \quad (242)$$

– Soit $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, et $L_k(p_k)$ la valeur de la distribution de Lorenz des revenus de Ω_k pour une proportion p_k des individus de la population Ω_k . Le rang de cette valeur p dans Ω est défini par :

$$p = \frac{1}{N} \left[\sum_{i < k} N_i + p_k N_k \right] \quad (243)$$

De plus

$$N\mu K_C(p) = \sum_{i < k} N_i \mu_i + N_k \mu_k L_k(p_k) \quad (244)$$

Par ailleurs, nous avons :

$$N\mu L_B(p) = \sum_{i < k} N_i \mu_i + N_k \mu_k p_k \quad (245)$$

(244) et (245) nous donne :

$$N\mu [L_B(p) - K_C(p)] = N_k \mu_k [p_k - L_k(p_k)] \quad (246)$$

En utilisant (243) nous obtiendrons :

$$dp = \frac{N_k}{N} dp_k \quad (247)$$

par conséquent :

$$[L_B(p) - K_C(p)] dp = \frac{N_k^2 \mu_k}{N^2 \mu} [p_k - L_k(p_k)] dp_k \quad (248)$$

L'intégration de $p = 0$ à 1 , équivalent à l'intégration de $p_k = 0$ à 1 et de $k = 1$ à n :

$$A_W = 2 \sum_{k=1}^n \frac{N_k^2 \mu_k}{N^2 \mu} \int_0^1 [p_k - L_k(p_k)] dp_k \quad (249)$$

D'où

$$A_W = \sum \omega_k G_k \quad (250)$$

– D'après ce qui précède il suffit de poser :

$$R = A_O$$

■

Remarque 2.2.8 Si $A_O = 0$ i.e il n'y a pas de chevauchement entre les groupes

$$G = G_B + \sum_k \omega_k G_k \quad (251)$$

L'exemple (2.1.2) est un cas particulier pour $k = 2$ de la formule (251).

Remarque 2.2.9 *Le coefficient de Gini n'est pas décomposable au sens de population, c'est à dire qu'il ne vérifie pas le principe (5).*

En fin, il importe de signaler que le coefficient de Gini vérifie une autre propriété très importante surtout si le but ultime de l'étude envisagée est l'analyse de l'inégalité selon les composantes de l'indicateur de bien-être. On sait par exemple que les ménages (les individus) tirent leurs revenus de plusieurs sources, suivant la quantité et la qualité des facteurs de production dont ils disposent. Le revenu total d'un ménage (un individu) peut être considéré comme la somme de plusieurs composantes pouvant inclure : les salaires, les profits, les gains en capital, les revenus de la propriété et divers transferts. Ces composantes ne contribuent pas nécessairement de la même façon à l'inégalité globale. *Il est possible de décomposer le coefficient de Gini pour évaluer la contribution de chaque facteur à l'inégalité.*

Supposons que l'on puisse exprimer le revenu total en fonction de ses composantes comme suit :

$$Y = \sum_{k=1}^T Y^k \quad (252)$$

On calcule le coefficient de concentration pour la composante k en fonction de la covariance d'une façon analogue au calcul du coefficient de Gini :

$$C_k = \frac{2}{\mu_k} \text{cov}(Y^k, p) \quad (253)$$

On voit aisément que :

$$\sum_{k=1}^T \frac{\mu_k}{\mu} C_k = \frac{2}{\mu} \text{cov}(Y, p) = G \quad (254)$$

Cette expression implique la suivante :

$$\sum_{k=1}^T \rho_k (C_k - G) = 0 \quad (255)$$

où $\rho_k = \frac{\mu_k}{\mu}$ est la proportion du revenu de la source k dans le revenu total. Sur la base de l'équation (255), l'effet d'une composante k sur l'inégalité soit positif ou négatif selon le signe de $(C_k - G)$. Si cette quantité est nulle, on conclut que la composante k n'affecte pas l'inégalité des revenus. Posons :

$$f_k = \rho_k \frac{C_k}{G} \quad (256)$$

f_k représente la contribution de la composante k à l'inégalité. De plus

$$\sum_k f_k = 1 \quad (257)$$

Résumé

L'analyse de l'inégalité soit comparative fondée le plus souvent sur les courbes indicatrices d'inégalité, telles les courbes de concentration et les courbes de Lorenz, soit mesurer par des indicateurs synthétiques pour comparer des répartitions du point de vue de l'inégalité. Lorsqu'une courbe domine une autre du même genre nous pouvons déclarer qu'une des répartitions en question est plus inégale que l'autre sans avoir recours à un indice synthétique d'inégalité. Lorsque les deux courbes se croisent, on a le plus souvent recours à des indicateurs synthétiques. Soit un indice de concentration se calcule en fonction de l'aire de concentration (coefficient de Gini, par exemple), soit basé sur le concept d'entropie (indicateur de Theil, par exemple).

L'analyse des facteurs d'inégalité sur la base d'un indicateur donné nécessite que ce dernier soit décomposable. Cette décomposition peut s'opérer sur deux dimensions : (i) suivant un profil de la population, ou (ii) suivant les composantes de l'indicateur de niveau de vie.

Chapitre 3

Croissance, inégalité et pauvreté

3.1 Analyse de pauvreté

L'étude de la variation d'un indice de pauvreté monétaire exige que l'on explicite ses déterminants et les facteurs susceptibles d'affecter ces derniers. Du point de vue strictement quantitatif, nous avons vu que les indices de pauvreté se calculent à partir d'une répartition du niveau de vie moyen, μ , et les inégalités relatives. Par conséquent on pourrait aussi définir les indices de pauvreté de la façon suivante :

$$P(z) = P(\lambda, \frac{\mu}{z}) \quad (258)$$

Où λ est un vecteur des paramètres caractéristiques de la courbe de Lorenz représentant l'inégalité dans la distribution.

En effet, les variations de la pauvreté peuvent se décomposer en fonction de la part due à l'inégalité et de celle due à la croissance, suivant la formule¹ :

$$\begin{aligned} P(\lambda_t, \frac{\mu_t}{z}) - P(\lambda_s, \frac{\mu_s}{z}) &= [P(\lambda_s, \frac{\mu_t}{z}) - P(\lambda_s, \frac{\mu_s}{z})] \\ &+ [P(\lambda_t, \frac{\mu_s}{z}) - P(\lambda_s, \frac{\mu_s}{z})] + R(\lambda, \mu) \end{aligned} \quad (259)$$

où s et t représentent deux dates différentes, R représente un résidu. Et P désigne une telle mesure additive de pauvreté.

Dans ce contexte, l'analyse des variations de la pauvreté se calcule sous forme d'*élasticité*, des indicateurs de l'impact potentiel de la croissance économique et des variations de l'inégalité sur la pauvreté.

¹Voir par exemple Ravallion et Datt(1992) et Essama-Nssah(avril 1997).

3.2 L'impact de la croissance économique

Soit X la variable des revenus, supposée régulière, de densité f de classe C^1 et de fonction de repartition F . La courbe de distribution de Lorenz associée à X est caractérisée par l'expression suivante :

$$\Gamma = \{M(p, L(p)) ; 0 \leq p \leq 1\} \quad (260)$$

Où p est la proportion de la population dont le revenu est inférieur à une valeur x de X , défini par (169) et L la distribution de Lorenz indiquée à (143).

on sait de plus qu'une croissance économique se traduit numériquement par la croissance de la fonction μ du revenu moyen.

3.2.1 Élasticité de l'incidence par rapport au revenu moyen :

Soit η_H^μ l'élasticité de H par rapport à μ , par définition :

$$\eta_H^\mu = \frac{\partial H}{H} / \frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{\mu}{H} \quad (261)$$

Par ailleurs $H = F(z) = \int_0^z f(t)dt$ est la proportion de la population dont le revenu est inférieur à un seuil z . D'après (171) :

$$L'(p) = \frac{1}{\mu} F^{-1}(p) = \frac{x}{\mu} \quad (262)$$

Et

$$L''(p) = \frac{1}{\mu f(x)} \quad (263)$$

En particulier

$$L'(H) = \frac{z}{\mu} \quad (264)$$

$$L''(H) = \frac{1}{\mu f(z)} \quad (265)$$

De plus

$$L''(p) = \frac{\partial L'(p)}{\partial \mu} \frac{\partial \mu}{\partial p} = -\frac{x}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial p} \quad (266)$$

Par conséquent

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = -\frac{z}{\mu^2 L''(H)} \quad (267)$$

Il en résulte que :

$$\eta_H^\mu = \frac{-z}{\mu H L''(H)} = \frac{-z f(z)}{H} \quad (268)$$

3.2.2 Élasticité d'un indicateur P_α ($\alpha > 0$) par rapport au revenu moyen :

Dans les conditions où $F \in C^2$, l'indicateur P_α est de la forme suivante :

$$P_\alpha(z) = \int_0^z \psi_\alpha(z, x) dF(x) \quad (269)$$

Où

$$\psi_\alpha(z, x) = \left(1 - \frac{x}{z}\right)^\alpha \quad (270)$$

Cette formule nous conduit à exprimer l'indicateur P_α comme fonction de l'incidence H de pauvreté :

$$P_\alpha(H) = \int_0^H \psi_\alpha(\mu L'(H), \mu L'(p)) dp \quad (271)$$

Puisque ψ_α est homogène de degré 0 par rapport au couple (x, y) , nous avons donc :

$$P_\alpha(H) = \int_0^H \psi_\alpha(L'(H), L'(p)) dp \quad (272)$$

Par ailleurs

$$\frac{\partial P_\alpha(H)}{\partial \mu} = \frac{\partial P_\alpha(H)}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \mu} = \frac{\partial H}{\partial \mu} L''(H) \int_0^H \frac{\partial \psi_\alpha(L'(H), L'(p))}{\partial L'(H)} dp \quad (273)$$

Par conséquent

$$\frac{\partial P_\alpha(H)}{\partial \mu} = \mu L''(H) \frac{\partial H}{\partial \mu} \int_0^z \frac{\partial \psi_\alpha(z, x)}{\partial z} dF(x) \quad (274)$$

D'après l'identité d'Euler :

$$\frac{\partial P_\alpha(H)}{\partial \mu} = \frac{-\mu L''(H)}{z} \frac{\partial H}{\partial \mu} \int_0^z x \frac{\partial \psi_\alpha(z, x)}{\partial x} dF(x) \quad (275)$$

La formule (267) nous conduit à écrire :

$$\frac{\partial P_\alpha(H)}{\partial \mu} = \frac{1}{\mu} \int_0^z x \frac{\partial \psi_\alpha(z, x)}{\partial x} dF(x) \quad (276)$$

Par conséquent l'élasticité η_α^μ pour $\alpha > 0$ est de la forme :

$$\begin{aligned} \eta_\alpha^\mu &= \frac{\partial P_\alpha}{\partial \mu} \frac{\mu}{P_\alpha} = \frac{1}{P_\alpha} \int_0^z -\alpha \frac{x}{z} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\alpha-1} dF(x) \\ &= \alpha \left[1 - \frac{1}{P_\alpha} \int_0^z \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\alpha-1} dF(x)\right] \end{aligned} \quad (277)$$

En particulier si $\alpha \geq 1$ on aura la formule suivante :

$$\eta_\alpha^\mu = \frac{\alpha}{P_\alpha} (P_\alpha - P_{\alpha-1}) = \alpha \left(1 - \frac{P_{\alpha-1}}{P_\alpha}\right) \quad (278)$$

Remarque 3.2.1 pour les valeurs 1 et 2 de α les deux élasticités associées sont :

$$\eta_1^\mu = 1 - \frac{H}{P_1} \quad (279)$$

$$\eta_2^\mu = 2\left(1 - \frac{P_1}{P_2}\right) \quad (280)$$

3.3 L'impact de la variation de l'inégalité

Le lien entre les deux notions, pauvreté et inégalité demeure implicite, néanmoins il n'y a de pauvres "relatifs" que parce qu'il y a des riches, donc des inégalités de revenus. L'existence d'un lien entre une mesure de pauvreté et l'inégalité qui est mise en valeur par la courbe de Lorenz - au moins dans le cas monétaire - est prouvée par la formule (259).

On suppose que notre but ultime est la réduction de l'inégalité pour obtenir la distribution de Lorenz $L(p)$. Sachant que $L^*(p)$ est la vraie valeur de cette distribution et en tenant compte que les deux distributions sont liée par la formule suivante :

$$L^*(p) = L(p) - \lambda(p - L(p)) \quad (281)$$

Quelle est l'impact de ces évolutions sur la pauvreté ?

En fait l'équation (281) s'écrit aussi :

$$p - L^*(p) = (1 + \lambda)(p - L(p)) \quad (282)$$

L'indice de Gini associé à la distribution L est défini comme suit :

$$G = 2 \int_0^1 (p - L(p)) dp \quad (283)$$

D'une façon analogue, l'indice de Gini associé à la distribution L^* est de la forme :

$$G^* = 2 \int_0^1 (p - L^*(p)) dp \quad (284)$$

Par conséquent

$$G^* = (1 + \lambda)G \quad (285)$$

3.3.1 Élasticité ξ_H^G de H/G :

En différentiant (282) par rapport à p on tire :

$$1 - \frac{\partial L^*}{\partial p}(p) = (1 + \lambda)\left(1 - \frac{\partial L}{\partial p}(p)\right) \quad (286)$$

En particulier :

$$1 - \frac{\partial L^*}{\partial p}(H) = (1 + \lambda)\left(1 - \frac{\partial L}{\partial p}(H)\right) \quad (287)$$

Supposons que H est la proportion des individus dont le revenu est inférieur à z associée à la distribution L et H^* la vraie valeur de cette proportion. En utilisant (264) on conclut que :

$$\frac{\partial L^*}{\partial p}(H^*) = \frac{z}{\mu} \quad (288)$$

Par conséquent des formules (286) et (288) :

$$\frac{\partial L}{\partial p}(H^*) = \frac{z^*}{\mu} \quad (289)$$

Où

$$z^* = \frac{z + \lambda\mu}{(1 + \lambda)} \quad (290)$$

En outre

$$H^* = F(z^*) \quad \text{et} \quad H = F(z) \quad (291)$$

L'élasticité ξ_H^G se conclura à partir des formules (285) et (291) :

$$\xi_H^G = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{H^* - H}{G^* - G} \frac{G}{H} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{F(z^*) - F(z)}{\lambda H} \quad (292)$$

Le théorème des accroissements finis nous donne :

$$F(z^*) - F(z) = (z^* - z)f(z + \theta(z^* - z)) \quad (293)$$

$$(0 \leq \theta < 1)$$

Par conséquent

$$\xi_H^G = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\mu - z)f(z + \frac{\lambda\theta}{1+\lambda}(\mu - z))}{(1 + \lambda)H} \quad (294)$$

$$\xi_H^G = \frac{(\mu - z)f(z)}{H} = \left(1 - \frac{\mu}{z}\right)\eta_H^\mu = \frac{1 - z/\mu}{HL''(H)} \quad (295)$$

3.3.2 Élasticité ξ_α^G pour $\alpha > 0$ de P_α/G :

Compte tenu du décalage de la distribution de Lorenz et de seuil de pauvreté ($z = (1 + \lambda)z^* - \lambda\mu$)

$$P_\alpha(\lambda) = \int_0^{z^*} \psi_\alpha(z, (1 + \lambda)x - \lambda\mu) dF(x) \quad (296)$$

L'élasticité s'obtient comme suit :

$$\xi_\alpha^G = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{P_\alpha(\lambda) - P_\alpha}{G(\lambda) - G} \frac{G}{P_\alpha} \quad (297)$$

En utilisant le théoreme des accroissements finis et en procedant de la même manière précédente nous allons aboutir à :

$$\xi_{\alpha}^G = \frac{1}{P_{\alpha}} \int_0^z (x - \mu) \frac{\partial \psi_{\alpha}}{\partial x}(z, x) dF(x) \quad (298)$$

Utilisons (276) et (277) dans (298), il vient :

$$\xi_{\alpha}^G = \eta_{\alpha}^{\mu} - \frac{\mu}{P_{\alpha}} \int_0^z -\frac{\alpha}{z} \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\alpha-1} dF(x) = \eta_{\alpha}^{\mu} + \frac{\alpha\mu}{zP_{\alpha}} \int_0^z \left(1 - \frac{x}{z}\right)^{\alpha-1} dF(x) \quad (299)$$

En particulier si $\alpha \geq 1$ on a :

$$\xi_{\alpha}^G = \eta_{\alpha}^{\mu} + \frac{\alpha\mu}{zP_{\alpha}} P_{\alpha-1} \quad (300)$$

En utilisant (278) dans (300) on trouve :

$$\xi_{\alpha}^G = \alpha \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{z}\right) \frac{P_{\alpha-1}}{P_{\alpha}}\right] \quad (301)$$

En particulier

$$\xi_1^G = 1 - \left(1 - \frac{\mu}{z}\right) \frac{H}{P_1} \quad (302)$$

$$\xi_2^G = 2 \left[1 - \left(1 - \frac{\mu}{z}\right) \frac{P_1}{P_2}\right] \quad (303)$$

3.4 Interpolation de la courbe de Lorenz

Il est connu que les données sur une population peuvent fournir des distributions de fréquence accumulée. Mais en générale elles ne fournissent pas une interprétation graphique de ces distributions, surtout, si le nombre d'individus dans cette population est élevé. C'était également une cause parmi d'autres qui faisait naître la suggestion d'une recherche judicieuse d'interpôler ces distributions pour avoir une courbe représentable. Differentes methodes ont été proposées.

3.4.1 la methode quadratique générale de la courbe de Lorenz

Soit le modèle quadratique généralisé caraterisé par l'équation suivante :

$$L(1 - L) = a(p^2 - L) + bL(p - 1) + c(p - L) \quad (304)$$

pour $p \in (0, 1)$ et a, b, c des paramètres réels à déterminer, et L la courbe de Lorenz qu'on voudrait estimer.

Notre but ultime est donc la recherche d'une solution $L(p), p \in (0, 1)$ de (304) deux

fois différentiable et vérifie les conditions suivantes :

$$i) \quad L(0) = 0$$

$$ii) \quad L(1) = 1$$

$$iii) \quad L'(0) \geq 0$$

$$iv) \quad L''(p) \geq 0 \quad \forall p \in (0, 1)$$

En différentiant (304) deux fois nous obtiendrons :

$$L'(1 - 2L) = a(2p - L') + b[L + L'(p - 1)] + c(1 - L') \quad (305)$$

et

$$L''(1 - 2L) - 2L'^2 = a(2 - L'') + b[2L' + L''(p - 1)] - cL'' \quad (306)$$

Posons :

$$e = -(b + c + a + 1) \quad (307)$$

D'après (304) et (307)

$$L^2 + (e + bp)L + ap^2 + c = 0 \quad (308)$$

Posons de plus :

$$m = b^2 - 4a \quad (309)$$

$$n = 2eb - 4c \quad (310)$$

$$\Delta(p) = mp^2 + np + e^2 \quad (311)$$

$$\delta = n^2 - 4me^2 \quad (312)$$

– Si $m < 0$, δ est donc positif. posons :

$$r = \delta^{\frac{1}{2}} \quad (313)$$

Dans ce cas il existe deux racines pour le binôme $\Delta(p)$ sont :

$$s_1 = \frac{r - n}{2m} \quad (314)$$

et

$$s_2 = \frac{-(r + n)}{2m} \quad (315)$$

Il est évident que $s_1 \leq s_2$ et $\Delta(p) \geq 0 \iff p \in (s_1, s_2)$. Mais

$$\Delta(0) = e^2 \geq 0 \quad (316)$$

$$\Delta(1) = (b + e)^2 - 4(a + c) = (a + c - 1)^2 \geq 0 \quad (317)$$

Donc $(0, 1) \subseteq (s_1, s_2)$, par conséquent $\Delta(p) \geq 0; \forall p \in (0, 1)$.

En d'autre terme (308) admet deux solutions la première

$$L_1(p) = -\frac{1}{2}[bp + e - \Delta^{\frac{1}{2}}(p)] \quad (318)$$

est refusée à cause de la condition iv), en effet

$$L''_1(p) = \frac{\Delta^{-\frac{3}{2}}(p)}{8}[-\delta] < 0 \quad (319)$$

i.e la seule solution de l'équation (308) qui peut vérifier les autres conditions est :

$$L(p) = -\frac{1}{2}[bp + e + (mp^2 + np + e^2)^{\frac{1}{2}}] \quad (320)$$

De plus

$$L'(p) = -\frac{1}{2}[b + \frac{1}{2}(2mp + n)\Delta^{-\frac{1}{2}}(p)] \quad (321)$$

et

$$L''(p) = \frac{\delta\Delta^{-\frac{3}{2}}(p)}{8} \quad (322)$$

Pour la calification de cette solution, elle doit vérifier les conditions i), ii), iii) et iv).

La condition i) implique

$$|e| = -e \quad \text{i.e} \quad e \leq 0 \quad (323)$$

La condition ii) implique

$$-\frac{1}{2}[b + e + \Delta^{\frac{1}{2}}(1)] = 1 \quad (324)$$

Nous déduisons de (317) et (324)

$$-(a + c + 1) + |a + c - 1| = -2 \quad (325)$$

Par conséquent

$$a + c \geq 1 \quad (326)$$

La condition iii) avec la formule (305) nous donnent :

$$-eL'(0) = c \quad \text{i.e} \quad c \geq 0 \quad (327)$$

La condition iv) est vérifiée grâce à la formule (322).

– Si $m > 0$, il nous faut discuter deux cas principaux :

*) Si $\delta < 0$; $\Delta(p) > 0$; $\forall p \in (0, 1)$ et on trouve de la même procédure que (318), (320) sont deux solutions mais dans ce cas la deuxième est refusée car elle ne vérifie pas la condition iv). Pour la première, la condition i) implique $e \geq 0$ et la condition ii) nous conduit à :

$$|a + c - 1| + (a + c - 1) = -4 \quad (328)$$

i.e

$$\begin{cases} |a + c - 1| \neq a + c - 1 & (2|a + c - 1| \neq -4) \\ |a + c - 1| \neq -(a + c - 1) & (0 \neq -4) \end{cases} \quad (329)$$

C'est une contradiction. Et par conséquent la deuxième solution est encore refusée.

***) Si $\delta \geq 0$ i.e

$$\left(\frac{n}{2e}\right)^2 \geq m > 0 \quad (330)$$

Alors

$$s_1 \geq s_2 \quad (331)$$

- Si $n > 0$ alors, $s_1 < 0$ et donc $(0, 1) \cap (s_2, s_1)$ est vide. i.e $\Delta(p) \geq 0$; $\forall p \in (0, 1)$, et on reprend la discussion précédente à fin d'obtenir que la seule solution vérifiant les quatre conditions *i*), *ii*), *iii*) et *iv*) est donnée par la formule (320).
- Si $n < 0$, i.e

$$0 < m \leq \left[-\frac{n}{2e}\right]^2 \quad (332)$$

Alors

$$s_1 = \frac{r}{2m} - \frac{n}{2m} > -\frac{n}{2m} > 0 \quad (333)$$

Il suffit que $m < -\frac{n}{2}$ pour que $\Delta(p)$ soit positif $\forall p \in (0, 1)$. Dans ce cas encore on trouve que la seule solution qui vérifie les autres conditions est caractérisée par la formule (320).

En résumé, dans tous les cas il existe une solution unique pour l'équation (304) avec des conditions supplémentaires sur les paramètres (voir Tableau (12)).

tableau (12) :

Les conditions sur L	Les conditions sur les paramètres
$L(0) = 0$	$e \leq 0$
$L(1) = 1$	$a + c \geq 1$
$L'(0) \geq 0$	$c \geq 0$
$L''(p) \geq 0$ pour $p \in (0, 1)$	(i) $m < 0$ ou (ii) $0 < m < (\frac{n}{2e})^2$ et $n > 0$ ou (iii) $0 < m < \min(-\frac{n}{2}, [\frac{n}{2e}]^2)$

Cette méthode nous permet de calculer les indicateurs (F.G.T) de pauvreté en procédant ces calculs par une estimation des paramètres.
D'après (264) et (321)

$$L'(H) = -\left[\frac{b}{2} + \frac{(2mH + n)(mH^2 + nH + e^2)^{-\frac{1}{2}}}{4}\right] = \frac{z}{\mu} \quad (334)$$

i.e

$$-\left(\frac{b}{2} + \frac{z}{\mu}\right) = (2mH + n) \frac{(mH^2 + nH + e^2)^{-\frac{1}{2}}}{4} \quad (335)$$

Pour déterminer la valeur de l'incidence H on doit résoudre l'équation suivante :

$$4\left[\left(b + \frac{2z}{\mu}\right)^2 m - m^2\right]H^2 + 4n\left[\left(b + \frac{2z}{\mu}\right)^2 - m\right]H + \left[4\left(b + \frac{2z}{\mu}\right)^2 e^2 - n^2\right] = 0 \quad (336)$$

Soit

$$\Delta = \left[4r\left(b + \frac{2z}{\mu}\right)\right]^2 \left[\left(b + \frac{2z}{\mu}\right)^2 - m\right] \quad (337)$$

Ce qui nous conduit à dire que (336) admet deux solutions, la première est refusée, la deuxième est :

$$H = \frac{-1}{2m} \left[n + r\left(b + \frac{2z}{\mu}\right) \left\{ \left(b + \frac{2z}{\mu}\right)^2 - m \right\}^{\frac{-1}{2}} \right] \quad (338)$$

Par ailleurs, $\forall \alpha > 0$

$$P_\alpha = \int_0^H \left[1 - \left(\frac{\mu}{z}\right) L'(p) \right]^\alpha dp \quad (339)$$

Par conséquent

$$P_1 = H - \frac{\mu}{z} L(H) \quad (340)$$

Et

$$P_2 = H - \frac{2\mu}{z} L(H) + \left(\frac{\mu}{z}\right)^2 \int_0^H [L'(p)]^2 dp \quad (341)$$

En utilisant (321) et (340)

$$P_2 = 2P_1 - H + \left(\frac{\mu}{z}\right)^2 \left\{ \left[\frac{b^2}{4}H + \frac{b}{2} \int_0^H \frac{1}{2}(2mp + n)(mp^2 + np + e^2)^{-\frac{1}{2}} dp \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{16} \int_0^H \frac{4m^2p^2 + 4mnp + n^2}{mp^2 + np + e^2} dp \right] \right\} \quad (342)$$

Après l'integration on obtient :

$$P_2 = 2P_1 - H + \left(\frac{\mu}{z}\right)^2 \left\{ \left[\frac{b^2}{4}H + \frac{b}{2} \{ (mH^2 + nH + e^2)^{\frac{1}{2}} + e \} \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{16} \int_0^H \left(4m + \frac{r^2}{mp^2 + np + e^2} \right) dp \right] \right\} \quad (343)$$

En remarquant que

$$L(H) = -\frac{1}{2} [bH + e + (mH^2 + nH + e^2)^{\frac{1}{2}}] \quad (344)$$

et

$$\frac{1}{p + \frac{n-r}{2m}} - \frac{1}{p + \frac{n+r}{2m}} = \frac{r/m}{p^2 + \frac{n}{m}p + \frac{e^2}{m}} \quad (345)$$

il en resulte de ce qui précède

$$P_2 = 2P_1 - H + \left(\frac{\mu}{z}\right)^2 \left\{ \left[\frac{m - b^2}{4}H - bL(H) \right] \right. \\ \left. + \left[\frac{r}{16} \int_0^H \left[\frac{1}{p + \frac{n-r}{2m}} - \frac{1}{p + \frac{n+r}{2m}} \right] dp \right] \right\} \quad (346)$$

Par conséquent

$$P_2 = 2P_1 - H - \left(\frac{\mu}{z}\right)^2 \left\{ aH + bL(H) - \frac{r}{16} \ln \left[1 + \frac{2rH}{(n-r)H + 2e^2} \right] \right\} \quad (347)$$

3.4.2 la methode parametrique Beta de la courbe de Lorenz

Soit le modèle caractérisé par l'équation :

$$L(p) = p - \theta p^\gamma (1-p)^\delta \quad (348)$$

Où L représente la distribution de Lorenz pour $p \in (0, 1)$, avec γ, δ et θ des paramètres à estimer. Par conséquent :

$$L'(p) = 1 - \theta p^\gamma (1-p)^\delta \left[\frac{\gamma}{p} - \frac{\delta}{1-p} \right] \quad (349)$$

Ce modèle à son tour construit une base de calculer les différents indicateurs (F.G.T) de pauvreté.

– 1) Calcul de l'incidence H :

Les deux formules (264) et (349) nous donnent :

$$1 - \frac{z}{\mu} = 1 - L'(H) = \theta H^\gamma (1 - H)^\delta \left[\frac{\gamma}{H} - \frac{\delta}{1 - H} \right] \quad (350)$$

Cette équation nous permet de calculer H , en utilisant un programme adéquat.

– 2) Calcul de P_1 :

$$P_1 = \int_0^H \left[1 - \frac{\mu}{z} L'(p) \right] dp = H - \frac{\mu}{z} L(H) \quad (351)$$

– 3) Calcul de P_2 :

La formule générale des indicateurs de Foster-Greer et Thorbecke est donnée par :

$$P_\alpha = \int_0^H \left[1 - \frac{\mu}{z} L'(p) \right]^\alpha dp \quad (352)$$

$\forall \alpha \geq 0$

Pour $\alpha = 2$ nous obtiendrons :

$$P_2 = \int_0^H \left[1 - \frac{\mu}{z} L'(p) \right]^2 dp \quad (353)$$

En d'autre forme

$$P_2 = H - \frac{2\mu}{z} L(H) + \left(\frac{\mu}{z} \right)^2 \left[\int_0^H L'^2(p) dp \right] \quad (354)$$

Par conséquent :

$$P_2 = 2P_1 - H + \left(\frac{\mu}{z} \right)^2 \left[\int_0^H \theta^2 p^{2\gamma} (1-p)^{2\delta} \left\{ \frac{\gamma^2}{p^2} - \frac{2\gamma\delta}{p(1-p)} + \frac{\delta^2}{(1-p)^2} \right\} dp \right. \\ \left. + H - 2 \int_0^H \{ 1 - L'(p) \} dp \right] \quad (355)$$

En développant

$$P_2 = 2P_1 - H + \left(\frac{\mu}{z} \right)^2 H - 2 \left(\frac{\mu}{z} \right)^2 H + 2 \left(\frac{\mu}{z} \right)^2 L(H) + \theta^2 \left(\frac{\mu}{z} \right)^2 \left[\gamma^2 \int_0^H p^{2\gamma-2} (1-p)^{2\delta} dp \right. \\ \left. - 2\gamma\delta \int_0^H p^{2\gamma-1} (1-p)^{2\delta-1} dp + \delta^2 \int_0^H p^{2\gamma} (1-p)^{2\delta-2} dp \right] \quad (356)$$

Par conséquent

$$P_2 = 2P_1 - 2\left(\frac{\mu}{z}P_1 - H\left[2\frac{\mu}{z} - \left(\frac{\mu}{z}\right)^2 - 1\right] + \theta^2\left(\frac{\mu}{z}\right)^2[\gamma^2\beta(H, 2\gamma - 1, 2\delta + 1) - 2\gamma\delta\beta(H, 2\gamma, 2\delta) + \delta^2\beta(H, 2\gamma + 1, 2\delta - 1)]\right) \quad (357)$$

Il en résulte que :

$$P_2 = \left(1 - \frac{\mu}{z}\right)[2P_1 - \left(1 - \frac{\mu}{z}\right)H] + \theta^2\left(\frac{\mu}{z}\right)^2[\gamma^2\beta(H, 2\gamma - 1, 2\delta + 1) - 2\gamma\delta\beta(H, 2\gamma, 2\delta) + \delta^2\beta(H, 2\gamma + 1, 2\delta - 1)] \quad (358)$$

avec

$$\beta(a, b, c) = \int_0^a t^{b-1}(1-t)^{c-1} dt \quad (359)$$

Remarque 3.4.1 *Le modèle caractérisé par (348) vérifie les conditions de la distribution de Lorenz.*

En effet les conditions *i)* et *ii)* sont vérifiées par construction. Les deux autres ont également besoin d'un ajout des conditions supplémentaires sur les paramètres (par exemple si on pose $L'(0.001, \theta, \gamma, \delta) \geq 0$ on aura des conditions sur θ, γ, δ et si de plus on ajoute la condition $L''(p, \theta, \gamma, \delta) \geq 0$, on obtiendra le plus de conditions sur ces paramètres).

Ces formules sont suffisantes à calculer les valeurs des indicateurs (F.G.T). Si on utilise un tel programme favorable au calcul des $\beta(a, b, c)$.

Avant la clôture de cette partie, nous allons résumer les calculs des indicateurs P_α , $\alpha \geq 0$ et ses élasticités, en comparant ses valeurs obtenues par les deux méthodes (La méthode quadratique générale(Q) et la méthode paramétrique de Beta(β)). Les résultats de cette comparaison sont illustrés dans le tableau (13).

Remarque 3.4.2 *Dans le tableau (12), $S(\dots)$ désigne la solution de l'équation (\dots) par un programme adéquat.*

tableau (13) : Comparaison des Courbes β et Q

I.É \ C	Q	β
$P_0 = H$	$-\frac{1}{2m} \{n + r(b + \frac{2z}{\mu})[(b + \frac{2z}{\mu})^2 - m]^{-\frac{1}{2}}\}$	$S(350)$
P_1	$H - \frac{\mu}{z}L(H)$	$H - \frac{\mu}{z}L(H)$
P_2	$2P_1 - H - (\frac{\mu}{z})^2 \{aH + bL(H) - \frac{r}{16} \ln[1 + \frac{2rH}{(n-r)H+2e^2}]\}$	$(1 - \frac{\mu}{z})[2P_1 - (1 - \frac{\mu}{z})H] + \theta^2(\frac{\mu}{z})^2 \{\gamma^2 \beta(H, 2\gamma - 1, 2\delta + 1) - 2\gamma\delta \beta(H, 2\gamma, 2\delta) + \delta^2 \beta(H, 2\gamma + 1, 2\delta - 1)\}$
η_H^μ	$-\frac{zf(z)}{H}$	$-\frac{zf(z)}{H}$
$\eta_\alpha^\mu \quad \alpha > 0$	$\alpha[1 - \frac{1}{P_\alpha} \int_0^z (1 - \frac{x}{z})^{\alpha-1} dF(x)]$	$\alpha[1 - \frac{1}{P_\alpha} \int_0^z (1 - \frac{x}{z})^{\alpha-1} dF(x)]$
$\eta_\alpha^\mu, \quad \alpha \geq 1$	$\alpha(1 - \frac{P_{\alpha-1}}{P_\alpha})$	$\alpha(1 - \frac{P_{\alpha-1}}{P_\alpha})$
η_1^μ	$1 - \frac{H}{P_1}$	$1 - \frac{H}{P_1}$
η_2^μ	$2(1 - \frac{P_1}{P_2})$	$2(1 - \frac{P_1}{P_2})$
ξ_H^G	$(1 - \frac{\mu}{z})\eta_H^\mu$	$(1 - \frac{\mu}{z})\eta_H^\mu$
$\xi_\alpha^G \quad \alpha > 0$	$\alpha[1 - \frac{(1-\frac{\mu}{z})}{P_\alpha}] \int_0^z (1 - \frac{x}{z})^{\alpha-1} dF(x)$	$\alpha[1 - \frac{(1-\frac{\mu}{z})}{P_\alpha}] \int_0^z (1 - \frac{x}{z})^{\alpha-1} dF(x)$
$\xi_\alpha^G \quad \alpha \geq 1$	$\alpha[1 - (1 - \frac{\mu}{z}) \frac{P_{\alpha-1}}{P_\alpha}]$	$\alpha[1 - (1 - \frac{\mu}{z}) \frac{P_{\alpha-1}}{P_\alpha}]$
ξ_1^G	$1 - (1 - \frac{\mu}{z}) \frac{H}{P_1}$	$1 - (1 - \frac{\mu}{z}) \frac{H}{P_1}$
ξ_2^G	$2[1 - (1 - \frac{\mu}{z}) \frac{P_1}{P_2}]$	$2[1 - (1 - \frac{\mu}{z}) \frac{P_1}{P_2}]$

I : les indices (F.G.T) de pauvreté.

É : les élasticités des indices par rapport au revenu moyen et à l'indice de Gini.

C : la courbe paramétrique.

Conclusion

Pour combattre la pauvreté il faut d'abord la conceptualiser, la mesurer et puis déterminer ses facteurs principaux. C'est en fait la démarche qui a sous-tendu ce mémoire.

La répartition d'un indicateur du niveau de vie au sein d'une population donnée est en général représenté par une distribution de probabilités dont les paramètres structurels (la moyenne et la variance) mesurent respectivement le niveau de vie moyen et le degré d'inégalité. La variation du premier est décrite par la croissance économique, tandis que la variation du deuxième peut se déterminer en fonction de la variation du coefficient de Gini. Si le choix d'une telle mesure de pauvreté respecte les objectifs de l'étude envisagée nous serons en mesure de juger sensiblement l'impact d'une telle politique sur les variations de pauvreté par rapport aux paramètres structurels et fournir pour les décideurs des informations pertinentes. Notons en fin que la plupart des indicateurs synthétiques qui mesurent la pauvreté ou l'inégalité s'appuient sur *des jugements de valeur* qui se traduisent par la pondération relative accordée à certaines classes de la population. Ceux-ci constituent le socle sur lequel se fonde toute évaluation de politique socio-économique. Et ce sont eux en fait qui devraient avec *le seuil de pauvreté* (dans le cas de la pauvreté monétaire) faire l'objet d'une *analyse de sensibilité*.

ANNEXE

FIG. 3.1 – Les courbes de Lorenz.

Bibliographie

- [1] B. Essama-Nssah. *Distributional Impact Analysis in Eview. Poverty Reduction Group The World Bank Washington, D.C. May 10, 2002. Draft : Comments Welcome.*
- [2] B. Essama-Nssah. 1997. *Document Technique de la Banque Mondiale Numéro 371 . Série de la Région Afrique.*
- [3] B. Essama-Nssah. *Inégalité, pauvreté et bien-être social. 1^{er} édition. De Boeck & Larcier s.a., 2000. Édition De Boeck uniersité.*
- [4] Dorothee Boccanfuso et Samuel Tambi Kaboré. Novembre 2001. *Croissance, Inégalité et Pauvreté dans les Années 1990 au Burkina Faso et au Sénégal. Une recherche réaalisée dans le cadre du projet MIMAP (PDF) <http://www.ecn.ulaval.ca>.*
- [5] Francis Borceux. *LATEX. La perfection dans le traitement de texte. Manuel de référénce, Inter Edition.*
- [6] Gaurav Datt. *Computational Tools for Poverty Measurement and Analysis. FCND Discussion Paper No. 50. October 1998.*
- [7] Graham Pyatt. *On the Interpretation and Disagregation of Gini Coefficients. The Economic Journal, 86 (June 1976),243-255. Printed in Great Britain.*
- [8] Julie A. Litchfield. March 1999. *Inequality : Methods and Tools. Text for World Bank's Web Site on Inequality, Poverty, and Socio-economic Performance : <http://www.worldbank.org/poverty/inequal/index.htm>.*
- [9] Khoan VO KHAC. *Mesure Integration Convolution Analyse de Fourier. Licence et Maîtrise de Mathématiques. CAPES et Agrégation de Mathématiques. Grandes Ecoles Scientifiques. ellipses.*
- [10] Mariem M. E., Mohamed Elmoctar O. S. B. et Elhassen O. Z. *Eléments pour la réalisation du diagnostic régional de la pauvreté (Draft). Une étude réalisée par CMAP et CSLP. le 20 Août 2002.*
- [11] Mark Dusheiko, Hugh Graelle and Stephen Campbell. *Discussion Paper in Economics No. 2002/07.*
- [12] Martin Ravallion. *Comparaisons de la pauvreté. LSMS document de travail No 122. Premier tirage : février 1996.*
- [13] Nicolas Ponty. *Revue Méthodologique No. 90-91 Août-Décembre 1998 (53-65). INSEE.*

- [14] Peter J. Lambert and Richard Aronson. *Inequality Decomposition Analysis and The Gini Coefficient Revisited*. *The Economic Journal*, 103 (September), 1221-1227. Royal Economic Society 1993. Published by Blackwell Publishers, 108 Cowley Road, Oxford OX4 1JF, UK and 238 Main Street, Cambridge MA 02142, USA.
- [15] PNUD. *Rapport Mondial sur le Développement Humain 1997*. Economica.
- [16] Projet EPCV. *Profil de la pauvreté en Mauritanie 2000*. Editions de ONS. Avril 2002.
- [17] Projet EPCV. *Profil de la pauvreté en Mauritanie 1996*. Editions de ONS. Mai 1997.
- [18] Q. Wodon and S. Yitzhaki. *Inequality and social Welfart*. Draft for Comments. June 26, 2001.
- [19] Sarah Marniesse. 6 Octobre 1999. *Note sur les différentes approches de la pauvreté*. Édition du Département des Politiques et Études. Division de la Macro-économie et des Études. (PDF) <http://www.ecn.ulaval.ca>.
- [20] SCHECHTMAN, 2000. *World and Inter-national Inequality Compared*. (PDF). (12-17).
- [21] Shlomo Yitzhaki and Robert I. Lerman. *Income Stratification and income inequality*. *Review of Income and Wealth Series* 37, Number 3, September 1991.
- [22] Shlomo Yitzhaki. *Economic distance and overlapping of distributions*. *Journal of Econometrics* 61 (1994) 147-159. North-Holland.
- [23] The World Bank Group. *Inequality Decomposition*. <http://www.worldbank.org/poverty/inequal/methods/decomp.htm>. 04/08/2002.