COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES INDICATEURS DE PAUVRETÉ ÉCHANTILLONNÉS

GANE SAMB LO

Abstract. Nous étudions les indicateurs de mesure de pauvreté, basés sur le revenu et évalués sur un échantillon de taille n, de la forme

$$p_n = \frac{1}{\delta(h)} \sum_{1 \leq i \leq q} \beta(h, i, n) \gamma(\epsilon_i)$$

, où q est le nombre d'individus pauvres dans l'échantillon, $\varepsilon_i = (Z - y_{i,n})/Z$ est le déficit de pauvreté relatif du i-ème individu de l'échantillon, β, δ et γ étant trois fonctions mesurables données. La consistence à temps fixe et à temps mobile de cette famille d'indicateurs, par rapport à l'indicateur global national P_N évalué sur la population de taille N, ainsi que leur normalité asymptotique sont discutées et prouvées en fonction des choix possibles de h=q ou h=n. Ces indicateurs empiriques sont, selon le cas, de bonnes approximations des indicateurs nationaux à partir desquels les politiques économiques de réduction de pauvreté sont déclinées.

1. INTRODUCTION

La pauvreté est un phénomene multidimensionnel et plusieurs approches existent pour la cerner. En particulier, on distingue des approches fondées sur le bien-être, les besoins de base et les capacités. La mesure de l'incidence, qui est notre préoccupation dans cet article, la profondeur et la sévérité de la pauvreté nécessitent la résolution de deux questions fondamentales que sont l'identification des pauvres et la construction d'indicateurs pertinents sur la base des informations disponibles. Dans la pratique, deux approches sont utilisées : l'une dite objective et l'autre dite subjective. Cette deuxième est basée sur la perception par les populations elles-mêmes de leurs conditions d'existence. Nous allons étudier ici les indicateurs quantitatifs particulièrement leurs versions sur l'échantillon aléatoire.

En s'appuyant sur une information quantitative résumée à travers un indicateur monétaire ou non monétaire basé sur le revenu ou les dépenses de consommation ou sur les besoins non satisfaits, il faut donc fixer une ligne de pauvreté qui sera définie comme un seuil Z en deçà duquel le ménage ou l'individu est considéré comme pauvre. (voir par exemple [1] pour de plus amples informations).

Dans ce papier, nous nous concentrons sur les contributions statistiques. Nous nous contenterons alors donc de l'approche la plus courante, utilisant les revenus pour classer les pauvres. Commençons par introduire les notations statistiques.

La population P dont le revenu Y est étudié, est composée d'individus notés $1, 2, ..., j, ..., N$ de sorte que Y_j soit le revenu de l'individu j. Cet individu j est

Date: le 07 avril, 2003.

Key words and phrases. Lois limites de statistiques, Indicateurs de pauvreté, inégalité de revenu, estimations consistentes, normalité asymptotique.

déclaré pauvre si son revenu n'atteint pas le seuil Z:

$$(j\ pauvre) \Leftrightarrow (Y_j \ \leq \ Z) \tag{1.1}$$

Ordonnons maintenant le vecteur des revenus ainsi : $0 = Y_{0,N} \leq Y_{2,N} \leq ... \leq Y_{N,N} \leq Y_{N+1,N} = +\infty$. Pour mesurer la pauvreté de la population, plusieurs indicateurs ont été proposés. Ces mesures quantitatives sont exactes, non aléatoires et définies sur la population P. Commençons par donner les indicateurs basés sur la fonction de répartition du revenu sur P :

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} Card \{j, 1 \leq j \leq N, \ Y_j \leq x\}, x\epsilon R \\ &= \frac{k}{N} \Leftrightarrow Y_{k,N} \leq x < Y_{k+1,N} \end{aligned} \tag{1.2}$$

de sorte que $Q = NF_N(Z)$ soit le nombre global de pauvres. Cela permet de définir

$$I_N = F_N(Z) = \frac{Q}{N} \tag{1.3}$$

appelé *indice ou prévalence* de pauvreté. Pour un pauvre j≤Q, son déficit de pauvreté est mesuré par $D_j = Z - Y_{j,N}$, à partir duquel on définit l'*intensité moyenne de pauvreté*,

$$J_N = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{Q} \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right) = 1 - \frac{1}{Z} \bar{Y}_Q \tag{1.4}$$

où

$$\overline{Y}_Q = \frac{1}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} Y_{j,N} \tag{1.5}$$

est le revenu moyen des pauvres. D'autres mesures moins évidentes, plus sophistiquées et plus synthétiques, ont été proposées. D'abord, Sen (1976) propose

$$P_{SE,N} = \frac{2}{H(Q+1)} \sum_{j=1}^{Q} (Q - j + 1) \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right) \tag{1.6}$$

avec H=N. De même Shorroks(1995) introduit

$$P_{SH,N} = \frac{1}{H^2} \sum_{j=1}^{Q} (2N - 2j + 1) \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right) \tag{1.7}$$

avec H=N. Enfin Foster, Green et Thorbecks (1984) donnent la famille d'indicateurs indexés par $\alpha > 0$,

$$P_{FGT,N,\alpha} = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{Q} \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right)^{\alpha} \tag{1.8}$$

Tous ces auteurs posent H=N bien que chacun de ces indicateurs ne soit une moyenne pondérée d'une fonction des déficits de pauvreté relatifs $e_j = \frac{Z - Y_{j,N}}{Z}$ que si H=Q. Il est souhaitable qu'un indicateur vérifie un ensemble d'axiomes (voir [3]) dont l'un des plus importants est la décomposabilité. Déjà, à ce niveau, le choix de N ou de Q a des répercussions importantes. En realité, le choix a des conséquences sur les propriétes géometriques et aussi sur les propriétes statistiques. Dans cette étude, nous voulons mener de front tous les choix possibles pour proposer les meilleurs estimateurs.

Nous nous proposons de faire la théorie asymptotique des indicateurs de pauvreté échantillonnés. En effet, les indicateurs nationaux ne sont acessibles que par recensement. Il est naturel de vouloir les estimer par sondage, c'est-à-dire, de les calculer sur des échantillons et nous nous contenterons pour l'instant d'échantillons simples. Nous allons étudier la consistence des indicateurs estimateurs ou empiriques et de leur normalité asymptotique. Signalons que la forme générale, que nous désignerons désormais sous le vocable d'indicateur général, de ces indicateurs est

$$P_N = \frac{1}{\delta(H)}\sum_{j=1}^{Q}\beta\left(N,j,H\right)\gamma\left(e_j\right) \tag{1.9}$$

pour H=Q ou N, β, δ et γ étant trois fonctions données. Plus précisément, nous nous restreignons d'abord aux estimateurs non pondérés, c'est-à-dire, pour lesquels $\beta(N,j,H)=1$, sous les hypothesès réalistes suivantes

$$n \to \infty, \quad N \to \infty,\ Q \to \infty,\ n^2/N \to 0,\ n \leq Q,\ Q/N \to \upsilon \in [0,1[\tag{1.10}$$

Pour etudier la normalité asymptotique, nous aurons besoin des hypothèses

$$n(1-n/N)^3 \to \infty, \qquad 1-n/N \quad \to \quad \xi^2 \in]0,1] \tag{1.11}$$

Dans la section 2, nous énoncerons et commenterons les prinpipaux résultats. Ceux-ci seront prouvés dans la section 3.Les indicateurs pondérés seront étudiés dans un article à suivre et se révéleront comme non convergents.

2. II - Indicateurs estimés

Soit Γ un échantillon de taille n et soit $y_1, y_2, \cdots, y_n$ les revenus observés et dont la statistique d'ordre est $0 = y_{0,n} \leq y_{1,n} \leq y_{2,n} \ \leq \ ...\leq y_{n,n} \leq y_{n+1,n} = \infty$. Soit q le nombre d'individus pauvres dans l'échantillon. Alors $\frac{q}{n} = F_n(Z)$ est l'indice de pauvreté empirique et $\varepsilon_i = (Z - y_{i,n})/Z$ est le déficit relatif de pauvreté de l'individu pauvre i$\leq q$. Il est naturel de prendre comme estimateur de l'indice général de pauvreté 1.9, son correspondant empirique

$$p_n = \frac{1}{\delta(h)}\sum_{1\leq i\leq q}\beta\left(h,i,n\right)\gamma\left(\epsilon_i\right) \tag{2.1}$$

avec h=q ou n. Nous allons désormais étudier les propriés statistiques de ces estimateurs en évacuant immédiatement le cas de $\theta_n = F_n(Z) = q\ /n$. En effet, il s'agit de l'estimation d'une proportion $\theta_N = F_N\left(Z\right) = Q/N$. L'estimateur est alors l'estimateur du maximum de vraisemblance, efficace, sans biais, et asymtotiquement normal. Précisément, nous avons

$$E(F_n(Z)) = F_N(Z) \tag{2.2}$$

et

$$\sigma_n = Var(F_n(Z)) = \frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\theta_N\left(1-\theta_N\right) \tag{2.3}$$

De plus $\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\theta_n\left(1-\theta_n\right)$ est aussi un estimateur sans biais de $Var(F_n(Z))$ de sorte qu'on ait l'approximation normale

$$\theta_N = \theta_n \pm u_{1-\alpha/2}(\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{n}{N}\right)\theta_n\left(1-\theta_n\right))^{1/2} \tag{2.4}$$

à $100\left(1-\alpha\right)\%$ près, et où u_α est le point critique d'ordre α de la loi normale standard.

Voici nos résultats.

Proposition 1. *Si* $p_n(q) = \frac{1}{q}\sum_{1=1}^{q}\gamma\left(\varepsilon_j\right)$, *alors* $E(p_n) = \left[\frac{1}{Q}\sum_{1=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\right]\left(\sum_{k=1}^{n}P\left(q=k\right)\right)$, *Si* $p_n(n) = \frac{1}{n}\sum_{1=1}^{q}\gamma\left(\varepsilon_j\right)$, *alors* $E(p_n) = P_N$. *Dans ce cas,*

$$\Sigma_N^2 = Var\left(P_n\right) = \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\tau^2$$

Déjà, nous constatons qu'en divisant par q et non par n, $p_n(h)$ est un estimateur biaisé de $P_N(Q)$, le biais étant $B = P_N(Q)(1-P\left(q=0\right))$, tandis que $p_n(N)$ est un estimateur sans biais de $P_N(N)$. Ceci nous suggère de considérer par la suite, la pondération par n pour les indicateurs empiriques et par N pour les indicateurs nationaux, c'est-à-dire

$$P_N = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right) \tag{2.5}$$

Tout de même, le biais relatif à $p_n(q)$, tend vers zéro puisque, par la formule de Stirling,

$$P(q=0) \sim (1-\frac{Q}{N})^{N+1/2}(1-\frac{Q}{N-n})^{N+Q-n}(1-\frac{n}{N-Q})^{Q} \leq (1-\frac{Q}{N})^{N} \tag{2.6}$$

avec $1-\frac{Q}{N})^N \rightarrow 0$ quand N devient grand. La grandeur 2.5 est associée à deux sortes de variance, d'abord

$$\tau_0^2 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{Q}(\gamma\left(e_j\right)-P_N)^2 \tag{2.7}$$

puis

$$\tau^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{j=1}^{Q}(\gamma\left(e_j\right)-P_N)^2 \tag{2.8}$$

En analysant le dernier résultat de la proposition, nous constatons aussi, que la ressemblance avec les résultats classiques de la théorie des sondages est parfaite. Mais dès qu'il s'agit d'estimer la varance Σ_N par son pendant échantillonné

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n-1}(\sum_{i=1}^{q}\gamma\left(\varepsilon_i\right)^2 - 2np_n^2 + qp_n^2) \tag{2.9}$$

les résultats diffèrent. La différence provient de celle de N et Q et de celle de q et n.En effet ceci empêche de sortir la forme $\sum_{1\leq i\leq n} \gamma\left(\varepsilon_i\right)^2$-$np_n^2$. Précisément, nous avons

Proposition 2. $E(\sigma_n^2) = \frac{1}{N}\left[\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)^2 + \frac{1}{N-1}\left[Q-1+\frac{(Q-2)(n-2}{N-2}\right]\left(\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\right)^2\right]$

Il est évident que σ_n^2 est un estimateur biaisé de Σ_N^2, mais asymptotiquement convergent puisque Var(p_n) $\to 0$, sous 1.10. Il nous reste à nous prononcer sur la normalité asymptotique. Pour cela, considérons $D_n^2 = \frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\tau_0^2$, qui est proche de Σ_N^2, autant que N/(N-1) est proche de l'unité. Nous avons

Théorème 1. *Supposons que 1.11 soit vraie, alors pour tout réel t,* $exp(\ \xi t(p_n - P_N)/D_n)) \to\ exp(t^2/2)$, *quand* $n\to\infty$

Ceci exprime la normalité asymptotique. Puisque D_n est partiquement égal à Σ_N que Σ_N/σ_N tend vers 1 en probabilité, on pourra alors utiliser l'approximation normale standard pour $\xi(p_n - P_N)/\sigma_n$ et utiliser l'intervalle de confaince à 100(1-α)% :

$$P_N = p_n \pm u_{1-\alpha/2}\ \sigma_n/\xi \tag{2.10}$$

Nous allons prouver ces résultats

3. PREUVES

Nous aurons besoin des variables de Cornfield associés à l'échantillon pour établir les preuves

3.0.1. *Variables de Cornfield.* Pour un individu j, 1≤ $j \leq N$, définissons les variables de Cornfield (voir [2], p.14)

$$\pi_j = \begin{cases} 1 & \text{si j est dans } \Gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{3.1}$$

Soit aussi l'ensemble Γ_1 des individus pauvres présents dans l'échantillon de sorte que Card $\Gamma_1 = q$. Ces variables permettent de ré-écrire les estimateurs $p_n(h)$ sous la forme

$$p_n = \frac{1}{h}\sum_{1=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\pi_j. \tag{3.2}$$

Nous aurons aussi

$$q = \sum_{1\leq j\leq Q}\pi_j. \tag{3.3}$$

Les lois individuelles de ces variables éventuellement conditionnées par (q=k), sont les suivantes :

$$\forall 1 \leq j \leq N, E\left(\pi_j\right) = n/N \tag{3.4}$$

puis

$$\forall 1 \leq j \leq Q, \qquad \forall 1 \leq k \leq n, E\left(\pi_j/q=k\right) = C_{Q-1}^{k-1} C_{N-Q}^{n-k}/C_N^n. \tag{3.5}$$

Leurs variances et covariances sont

$$1 \leq j \leq N, \ Var\left(\pi_j\right) = \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right) \tag{3.6}$$

et

$$\forall 1 \leq j \neq h \leq N, \ cov(\pi_j, \pi_h) = -\frac{n}{N\left(N-1\right)}\left(1-\frac{n}{N}\right) \tag{3.7}$$

Par contre la loi conjointe du vecteur $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_Q)$ pour les individus pauvres est donnée par son domaine D(Q)=$\{0,1\}^Q$ et ses probabilités

$$P\left(\pi = x\right) = C_{N-Q}^{n-k}/C_N^n, \ \mathrm{x} \in D(Q) \tag{3.8}$$

avec $s(x) = \sum_{i=1}^{Q} x_i = k$.

3.0.2. *Preuve de la proposition 1.* Soit h=q, nous avons d'après 3.1 et 3.3 et 3.4,

$$E(p_n) = E(\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\pi_j) = \tag{3.9}$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\frac{1}{q}\sum_{1\leq j\leq Q}\gamma\left(e_j\right)\pi_j)/(q=k))P(q=k)) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)C_{Q-1}^{k-1}C_{N-Q}^{n-k}P\left(q=k\right)/C_N^n \tag{3.10}$$

Or $C_{Q-1}^{k-1}\ C_{N-Q}^{n-1}/C_N^n = \frac{C_{Q-1}^{k-1}}{C_Q^k}\ P(q=k) = \frac{k}{Q}\ P\left(q=k\right)/C_N^n$. D'où le résultat puisque P(q=k)=$C_Q^k\ C_{N-Q}^{n-k}/C_N^n$.

Si h=n, nous aurons

$$E(p_n) = E(\frac{1}{n}\sum_{1=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\pi_j) = \frac{1}{n}\sum_{1=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)n/N \tag{3.11}$$

D'où résultat. Evaluons maintenant Var(p_n). Nous avons

$$Var\left(P_n\right) = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)^2 Var\left(\pi_j\right) + \sum_{1\leq j\neq h\leq Q}\gamma\left(e_j\right)\gamma(e_h)Cov\left(\pi_j,\pi_h\right)\right] \tag{3.12}$$

$$= \frac{1}{n^2}\left[\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)^2 - \frac{n}{N(N-1)}\left(1-\frac{n}{N}\right)\sum_{1\leq j\neq h\leq Q}\gamma\left(e_j\right)\gamma(e_h)\right] \tag{3.13}$$

En notant

$$\sum_{1\leq j\neq h\leq Q}\gamma\left(e_j\right)\gamma(e_h)=\left(\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\right)^2-\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)^2 \tag{3.14}$$

on arrive bien à $Var\left(P_n\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{n}{N}\right)\tau^2$,qui est le résultat cherché.

3.0.3. *Preuve de la proposition 2.* Nous avons

$$(n-1)\,\sigma_n^2=\sum_{i=1}^{q}\gamma\left(\varepsilon_i\right)^2-2np_n^2+qp_n^2=\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_i\right)^2\pi_j-2np_n^2+qp_n^2 \tag{3.15}$$

$$=\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)^2\pi_j-2n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\,\pi_j\right)^2+\left(\sum_{h=1}^{Q}\pi_h\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\pi_j\right)^2 \tag{3.16}$$

Des calculs directs aboutissent à

$$E(\sigma_n^2)=\frac{1}{N}\left[\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)^2+\frac{1}{N-1}\left[Q-1+\frac{(Q-2)(n-2)}{N-2}\right]\left(\sum_{j=1}^{Q}\gamma\left(e_j\right)\right)^2\right] \tag{3.17}$$

De plus $Var\left(p_n\right)\rightarrow 0$ et par suite $p_n\rightarrow P_N$. La proposition 2 est entièrement démontrée.

3.0.4. *Preuve du Théorème.* Rappelons la loi de π définie en 3.8,

$$P\left(\pi=x\right)=C_{N-Q}^{n-k}\ /\ C_N^n,\text{ avec }s(x)=k$$

D'abord nous aurons,

$$C_{N-Q}^{n-k}/C_N^n=\frac{n!}{(n-k)!}\frac{(N-Q)!}{(N-Q-n+k)!}\frac{(N-n)!}{N!}x \tag{3.18}$$

$$=A_n^k.\frac{(N-Q)^{n-k}}{N^n}\prod_{j=1}^{n-k-1}\left(1-\frac{1}{N-Q}\right)/\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{N!}\right) \tag{3.19}$$

Sous 1.11, nous avons

$$\prod_{j=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{N}\right)=\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{N}\right)\right) \tag{3.20}$$

et

$$\prod_{j=1}^{n-k-1}\left(1-\frac{1}{N-Q}\right)=\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{N}\right)\right) \tag{3.21}$$

Dès lors

$$C_{N-Q}^{n-k}/C_N^n=\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{n^2}{N}\right)\right)A_n^k\left(1-\frac{Q}{N}\right)^{n-k}N^{-k} \tag{3.22}$$

où $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ signifie que $\lim\sup_{n\to\infty} |u_n/v_n| < \infty$. Evaluons, pour t réel fixé, maintenant la fonction des moments $\Psi_{Z_n}(t)$ de

$$Z_n = (p_n - P_N)\,/D_n. \;= \sum_{j=1}^{Q} (\frac{1}{n}\gamma(e_j) - \frac{1}{s(x)} P_N)\pi_j \;/D_n \tag{3.23}$$

Donc

$$\Psi_{Z_n}(t) = E(e^{tZ_n}) = \sum_{x\epsilon D(k)} \exp\left(t\,\sum_{j=1}^{Q} (\frac{1}{n}\gamma(e_j) - \frac{1}{s(x)} P_N\ )\ x_j\ /D_n\right) P\left(\pi = x\right) \tag{3.24}$$

$$= \sum_{k=o}^{n} \sum_{s(x)=k} \exp\left(t\,\sum_{j=1}^{Q}\ \left(\frac{1}{n}\gamma(e_j\right) - \frac{1}{k}P_N)x_j/Z_n\right).A_n^k \left(1 - \frac{Q}{N}\right)^{n-k} N^{-k}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{n^2}{N}\right)\right) \tag{3.25}$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}(t).\left(1 + \mathcal{O}(\frac{n^2}{N})\right) \tag{3.26}$$

En isolant $A_{n,k}(t)$ nous obtenons, puisque $\Pi_{1\leq j\leq Q}\ x_j = 1$,

$$A_{n,k}(t) = C_n^k\left(1 - \frac{Q}{N}\right)^{n-k} N^{-k} \sum_{x\epsilon D(Q),s(x)=k} \frac{k!}{\underset{1\leq j\leq jQ}{\Pi} x_j!} \Pi_{1\leq j\leq Q} e^{\frac{t}{D_n}\left(\frac{1}{n}\gamma(e_j) - \frac{1}{k}P_N\right)x_j} \tag{3.27}$$

$$= C_n^k\left(1 - \frac{Q}{N}\right)^{n-k} N^{-k}\left(\sum_{j=1}^{Q} e^{t\left(\frac{1}{n}\gamma(e_j) - \frac{1}{k}P_N\right)/D_n}\right)^k \tag{3.28}$$

$$= e^{-tP_N\ /D_n} C_n^k\left(1 - \frac{Q}{N}\right)^{n-k} N^{-k}\left(\sum_{j=1}^{Q} e^{t(e_j)\ /\ (n\tau_n)}\right)^k \tag{3.29}$$

Donc

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}(t) = e^{-tP_N\ /\ \tau_n}\left(1 - \frac{Q}{N} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{Q} e^{t\gamma(e_j)\ /\ (nD_n)}\right)^n \tag{3.30}$$

Or $nD_n = \tau_0\sqrt{n\left(1 - \frac{n}{N}\right)} \to \infty\ qd\ n \to \infty$, d'après 1.11. Donc un développement de l'exponentielle au second degré donne

$$\forall 1 \leq j \leq Q, e^{t\gamma(e_j)\ /\ nD_n} = 1 + t\gamma(e_j)/\left(nD_n\right) + \frac{t^2\gamma(e_j)^2}{2n^2D_n^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2D_n^3}\right) \tag{3.31}$$

Donc

$$1 - \frac{Q}{N} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{Q} e^{t\gamma(e_j)\ /\ nD_n} \tag{3.32}$$

$$1 - \frac{Q}{N} + \frac{Q}{N} + \sum_{j=1}^{Q} \frac{t}{nND_n}\gamma(e_j) + \frac{t^2}{2n^2 D_n^2 N}\sum_{j=1}^{Q} \gamma h^2(e_j) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Nn^2 D_n^3}\right) \tag{3.33}$$

D'où

$$\begin{aligned} & Log(1 + \sum_{j=1}^{Q} \frac{t}{nND_n}\gamma(e_j) + \frac{t^2}{2n^2 D_n^2 N}\sum_{j=1}^{Q} \gamma h^2(e_j) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{Nn^2 D_n^3}\right)) \\ \equiv\ & Log\,(1 + u_n) \end{aligned} \tag{3.34}$$

avec $u_n \to 0$ qd $n \to +\,\infty$. En développant ce dernier terme à l'ordre deux, nous

voyons que ce terme est égal à :

$$\frac{t}{nD_n}P_n + \frac{t^2}{2_n^2 D_n^2}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{Q} \gamma^2(e_j) - \frac{t^2}{2_n^2 D_n^2}\left(\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{Q} \gamma(e_j)\right)^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3 D_n^3}\right) \tag{3.35}$$

Enfin

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^{n} A_{n,k}(t) = e^{-tP_N\ /D_n} \exp\left(nLog(1 + u_n)\right) \tag{3.36}$$

(3.37)

$$= e^{-tP_N\ /\ \tau_n} \exp\left(\frac{tP_N}{D_n} + \frac{t^2}{2nD_n}\left[\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{Q} \gamma(e_j)^2 - (\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{Q} \gamma(e_j))^2\right] + \eth\left(\frac{1}{n^3 \tau_n^3}\right)\right)$$

$$= \exp\left(\frac{t^2}{2(1 - \frac{n}{N})} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2 \tau_n^3}\right)\right) \to \exp(t^2/(2\xi^2)) \tag{3.38}$$

quand n$\to \infty$, sous les hypothèses 1.11, ce qui termine la preuve.

4. CONCLUSION

Ces résultats s'étendent très aisément à l'échantillonnage stratifié proportionnel ou optimal. L'extention aux indicateurs composites n'est pas évidente. L'étude de la normalité asymptotique de p$_n(q)$, qui s'est révélé comme un estimateur biaisé, et celle des indicateurs ponderés de Sen et de Shorrok reste à faire. Il serait aussi interessant de simuler ces résultats sur les bases de données, par exemple, des Enquetes Sénégalaises Auprès des ménages (ESAM), pour voir leur efficacité pour de petites tailles.

L'auteur remercie le professeur Galaye Dia et son collègue Ahmadou Bamba Sow, pour leur lecture munitieuse et leurs suggestions et leur intêret pour ce travail.

References

[1] **Document Stratégique de Réduction de la Pauvreté**, *site www.finances.gouv.sn/dsrp02.html*, Sénégal

[2] **Jean Marie GROSBAS**(1987), *Méthodes statistiques des sondages*, Economica Paris

[3] **Taleb Ely Ould Taleb Ahmed** (2003), *Les mesures de la pauvreté, de l'inégalité et l'impact de la croissance économique*, mémoire de DEA, Université Gaston Berger de Saint-Louis.

Laboratoire d'Etudes et de Recherches en Statistiques et Développement (LERSTAD), Université Gaston Berger de Saint-Louis. Sénégal., Bp 234 Saint-Louis, Sénégal.

E-mail address: gslo@uva.org