

CONVERGENCE DES INDICATEURS DE PAUVRETÉ PONDÉRÉS DE SEN ET DE SHORROCKS.

GANE SAMB LO

ABSTRACT. Nous étudions les indicateurs *pondérés* de mesure de pauvreté, basés sur le revenu et évalués sur un échantillon de taille n , de la forme

$$p_n = \frac{1}{\delta(h)\rho(l)} \sum_{1 \leq i \leq q} \beta(m, i, n) \gamma(\varepsilon_i)$$

, où q est le nombre d'individus pauvres dans l'échantillon, $\varepsilon_i = (Z - y_{i,n})/Z$ est le déficit de pauvreté relatif du i -ème individu de l'échantillon, β, δ, γ et ρ étant des fonctions mesurables données. Plus précisément, les formes de Sen et Shorrocks sont étudiées en détails. La consistance à temps mobile de cette famille d'indicateurs, par rapport à l'indicateur global national P_N évalué sur la population de taille N , est prouvée pour tous les choix possibles de h, l et m parmi $\{n, q\}$ à l'exception d'un seul concernant l'indicateur de Shorrocks.

1. INTRODUCTION

Les aspects quantitatifs de la pauvreté ont été largement étudiés dans les deux dernières décénies. Une revue des méthodes utilisées, des indicateurs proposés et de leurs déclinaisons en matière de politique économique est disponible dans [?]. Le Living Standard Measurements Study (*Lms*) de la banque mondiale a consacré plus de cent cinquante documents de travail sur cette question. Pour autant, les indicateurs utilisés n'ont pas fait l'objet d'une théorie asymptotique pouvant justifier leur extrapolation sur la population totale en tant que paramètres estimés. Ces indicateurs sont pour la plupart définis à partir de la population finie dans leur forme discrète. Il importe donc de faire la théorie asymptotique qui se fera dans le cadre naturel de théorie des valeurs extrêmes. Cette approche statistique accompagnera désormais l'approche axiomatique de Sen (voir [?]). Introduisons d'abord les indicateurs utilisés avant de définir l'objet de cet article. Notons par P la population dont le revenu Y est étudié, composée d'individus notés $1, 2, \dots, j, \dots, N$ de sorte que Y_j soit le revenu de l'individu j . Cet individu j est déclaré pauvre si son revenu n'atteint pas un seuil Z donné (des discussions très approfondies sur la nature, les fondements et les différentes approches de la détermination du seuil de pauvreté appelé aussi *ligne de pauvreté* sont aussi disponibles dans [?]) :

$$(1.1) \quad (j \text{ pauvre}) \Leftrightarrow (Y_j \leq Z)$$

Ordonnons maintenant le vecteur des revenus ainsi : $0 = Y_{0,N} \leq Y_{2,N} \leq \dots \leq Y_{N,N} \leq Y_{N+1,N} = +\infty$. Pour mesurer la pauvreté de la population, plusieurs indicateurs ont été proposés. Ces mesures quantitatives sont exactes, non aléatoires

Date: le 23 mai, 2003, première version.

Key words and phrases. Lois limites de statistiques, Indicateurs de pauvreté, inégalité de revenu, estimations asymptotiquement consistentes, normalité asymptotique, statistique du rang, loi hypergéométrique, théorie des sondages.

et définies sur la population P. Commençons par donner les indicateurs basés sur la fonction de répartition du revenu sur P :

$$(1.2) \quad \begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \text{Card} \{j, 1 \leq j \leq N, Y_j \leq x\}, x \in IR \\ &= \frac{k}{N} \Leftrightarrow Y_{k,N} \leq x < Y_{k+1,N} \end{aligned}$$

De sorte que $Q = NF_N(Z)$ soit nombre global de pauvres. Cela permet de définir

$$(1.3) \quad I_N = F_N(Z) = \frac{Q}{N}$$

appelé *indice ou prévalence* de pauvreté. Pour un pauvre $j \leq Q$, son déficit de pauvreté est mesuré par $D_j = Z - Y_{j,N}$, à partir duquel on définit l'*intensité moyenne de pauvreté*,

$$(1.4) \quad J_N = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^Q \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right) = 1 - \frac{1}{Z} \bar{Y}_Q$$

où

$$(1.5) \quad \bar{Y}_Q = \frac{1}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} Y_{j,N}$$

est le revenu moyen des pauvres. D'autres mesures moins évidentes, plus sophistiquées et plus synthétiques, ont été proposées. D'abord, Sen (1976) propose

$$(1.6) \quad P_{SE,N} = \frac{2}{H(Q+1)} \sum_{j=1}^Q (Q-j+1) \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right)$$

avec $H=N$. De même Shorroks(1995) introduit

$$(1.7) \quad P_{SH,N} = \frac{1}{H^2} \sum_{j=1}^Q (2N - 2j + 1) \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right)$$

avec $H=N$. Enfin Foster, Green et Thorbecke (1984) donnent la famille d'indicateurs indexés par $\alpha > 0$,

$$(1.8) \quad P_{FGT,N,\alpha} = \frac{1}{H} \sum_{j=1}^Q \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right)^\alpha$$

Le choix du *coefficient de relativisation* H parmi $\{Q, N\}$ a une importance réelle et influence sur la vérification des axiomes de pauvreté. Nous verrons aussi qu'il a des répercussions statistiques importantes comme cela a été montré dans [?]. Il permet aussi d'enrichir les indicateurs de pauvreté et permet d'avoir un choix plus large pour trouver les *mieux* convergents. Auparavant, signalons que ces indicateurs peuvent être regroupés sous la forme

$$(1.9) \quad P_N = \frac{1}{\delta(H)\rho(L)} \sum_{j=1}^Q \beta(M, j) \gamma(e_j)$$

où H , L et M sont pris parmi $\{N, Q\}$.

Les propriétés de ces indicateurs sont importantes dans la déclinaison des politiques économiques dans l'analyse de pauvreté quant à la stratégie de réduction de celle-ci. Dans cette optique, plusieurs axiomes, obligatoires ou désirés, ont été énoncés depuis l'oeuvre pionnière de Sen ([?]). Nous en énonçons les plus importants dans un annexe, en fin d'article.

Dans la pratique des acteurs de l'étude de la pauvreté et de la lutte contre celle-ci, le calcul de de l'indicateur (??), se fait plus souvent sur un échantillon de taille n (grâce à un sondage) que sur la population totale (grâce à un recensement). Sur un sondage, l'indicateur dans sa forme empirique se met sous la forme

$$(1.10) \quad p_n(h) = \frac{1}{\delta(h)} \sum_{1 \leq i \leq q} \beta(n, i, h) \gamma(\epsilon_i)$$

où $0 = y_{0,n} \leq y_{1,n} \leq y_{2,n} \leq \dots \leq y_{n,n} \leq y_{n+1,n} = \infty$ est la statistique d'ordre des revenus des individus observés dans l'échantillon $\Gamma : y_1, y_2, \dots, y_n$, q étant le nombre pauvres dans l'échantillon et $\epsilon_i = (Z - y_{i,n})/Z$ étant le déficit de pauvreté du i -ième pauvre dans Γ , h étant pris dans $\{n, q\}$. Il est alors capital que (??) soit un estimateur sans biais (ou au moins asymptotiquement) de (??) et qu'il soit asymptotiquement normal. Nous avons alors là une deuxième série de propriétés dites statistiques qu'il serait important que la version empirique de (??) possédât. Dans [?], nous avons établi que tel est le cas pour les indicateurs non pondérés, c'est-à-dire, pour lesquels $\beta(M, j)$ est constamment égal à 1, $\delta(H) = N$ et $\rho(L) = 1$.

Notre objectif est d'étendre ces résultats pour les estimateurs de Sen et de Shorrocks, c'est-à-dire les formes pondérées, en tenant en compte des choix multiples des coefficients de relativisation. Mais le volume des calculs nous fait limiter à l'étude des biais. La normalité asymptotique sera étudiée plus tard.

2. RESULTATS

Afin de mieux faire ressortir le rôle du coefficient de relativisation, écrivons les deux indicateurs de Sen et de Shorrocks sous la forme :

$$(2.1) \quad P_{SE,N}(H, L) = \frac{2}{H(L+1)} \sum_{i=1}^q (Q - j + 1) \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right)$$

pour l'estimateur de Sen avec H et L pouvant prendre l'une des valeurs N ou Q , et

$$(2.2) \quad P_{SH}(H, L, M) = \frac{1}{HL} \sum_{j=1}^Q (2M - 2j + 1) \left(\frac{Z - Y_{j,N}}{Z} \right)$$

pour l'estimateur de Shorrocks avec H , L et M pouvant prendre les valeurs de N et Q . Leurs versions empiriques sur l'échantillon seront

$$(2.3) \quad p_{SE,N}(h, l) = \frac{2}{h(l+1)} \sum_{i=1}^q (q - i + 1) \left(\frac{Z - y_{i,n}}{Z} \right)$$

et

$$(2.4) \quad P_{SH}(h, l, m) = \frac{1}{hl} \sum_{i=1}^q (2m - 2i + 1) \left(\frac{Z - y_{i,n}}{Z} \right)$$

où h, l , ou m vaut n ou q selon que H, L ou M vaut N ou Q . Soit les quantités

$$(2.5) \quad K = \sum_{k=1}^n P(q = k) \quad ; \quad K' = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} P(q = k)$$

où la loi de probabilité de q est donnée par

$$P(q = k) = \binom{n}{k} \binom{N - Q}{n - k} / \binom{N}{Q}, \quad k=0,1,\dots,n$$

De plus, nous devons supposer certaines hypothèses de stabilité des moyennes associées à la pauvreté. Il est naturel de supposer que les quantités moyennes suivantes sont stables, i.e., très proches d'une quantité positive, finie et fixe, pour des grandes valeurs de Q .

$$(2.6) \quad \frac{1}{\Phi} \sum_{1 \leq j \leq Q} \phi(j) \gamma(e_j)^\vartheta \approx \xi_{(\vartheta, \phi)}$$

où $\{\phi(j), j = 1, \dots, Q\}$ sont des poids positifs avec $\sum_{1 \leq j \leq Q} \phi(j) = \Phi$. De plus, la pauvreté est relativement importante dans les populations, (avec une prévalence de l'ordre de 60% au Sénégal). La condition suivante est alors raisonnable

$$(2.7) \quad Q/N \rightarrow \xi \in]0, 1[$$

Voici nos résultats.

Proposition 1. *Sous les conditions (??) et (??), et pour tous les choix possibles de h et l de la famille d'indicateurs de Sen, l'estimateur empirique est biaisé mais asymptotique convergent, i.e.,*

$$E(p_{SE,n}(h, l)) = P_{SE,N}(H, L) + \mathcal{O}(n^{-1})$$

Proposition 2. *Sous les conditions (??) et (??), et pour tous les choix possibles de h, l et m de la famille d'indicateurs de Shorroks, à l'exception du choix (q, q, n) , l'estimateur empirique de Shorrocks est biaisé mais asymptotique convergent, i.e.,*

$$E(p_{SE,n}(h, l)) = P_{SE,N}(H, L) + \mathcal{O}(n^{-1})$$

Remarque 1. *Vous voyons bien que les estimateurs empiriques pondérés ne sont pas des estimateurs non biaisés de leurs correspondants sur le plan global. L'importance de ce résultat tient au fait que pour tous les choix possibles, il y a convergence des espérances. Ces choix multiples sont très importants pour les simulations. Pour une grandeur des tailles des échantillons connues, il sera loisible de voir le ou les choix pour lesquels les estimateurs sont les plus performants et les recommander.*

Remarque 2. *A la fin de l'article, dans les problématiques de recherche futures, nous énonçons une conjecture pour le cas restant.*

3. PREUVES DES RÉSULTATS

Commençons par définir quelques variables auxiliaires dont les variables de Cornfield et leurs lois. Pour un individu j , $1 \leq j \leq N$, les variables de Cornfield sont (voir [?], p.14)

$$(3.1) \quad \pi_j = \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ est dans } \Gamma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit aussi l'ensemble Γ_1 des individus pauvres présents dans l'échantillon de sorte que $\text{Card } \Gamma_1 = q$. Définissons les variables de rang pour un individu pauvre $j \leq Q$

$$(3.2) \quad R_j = \begin{cases} h & \text{si } j \text{ est à la } h^{\text{ième}} \text{ place dans } \Gamma_1 \\ 0 & \text{j n'est pas dans } \Gamma_1 \end{cases}$$

Nous avons

$$(3.3) \quad q = \sum_{1 \leq j \leq Q} \pi_j$$

Les lois individuelles de ces variables éventuellement conditionnées par ($q=k$), sont les suivantes :

$$(3.4) \quad \forall 1 \leq j \leq N, E(\pi_j) = n/N,$$

puis

$$(3.5) \quad \forall 1 \leq j \leq Q, \quad \forall 1 \leq k \leq n, E(\pi_j/q = k) = C_{Q-1}^{k-1} C_{N-Q}^{n-k} / C_N^n.$$

Leurs variances et covariances sont

$$(3.6) \quad 1 \leq j \leq N, \text{Var}(\pi_j) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

et

$$(3.7) \quad \forall 1 \leq j \neq h \leq N, \text{cov}(\pi_j, \pi_h) = -\frac{n}{N(N-1)} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

Par contre la loi conjointe du vecteur $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_Q)$ pour les individus pauvres est donnée par son domaine $D(k) = \{0, 1\}^k$ et ses probabilités

$$(3.8) \quad P(\pi = x) = C_{N-Q}^{n-k} / C_N^n$$

avec $s(x) = \sum_{i=1}^Q x_i$. Les lois des R_j sont données par (pour $1 \leq i, j \leq Q$), $1 \leq k \leq n$

$$(3.9) \quad P(R_j = h/q = k) = C_{j-1}^{h-1} C_{Q-j}^{k-j} C_{Q-j}^{k-h} / C_Q^k = \frac{h}{j} P(X_{jk} = h), \quad h = 1, \dots, j$$

où X_{jk} est une variable aléatoire suivant la loi hypergéométrique et représente le nombre d'individus marqués dans un échantillon de k individus tirés parmi Q et comptant j marqués. Dès lors, nous avons

$$(3.10) \quad E(R_j/q = k) = \sum_{1 \leq h \leq \min(j, k)} \frac{h^2}{j} P(X_{jk} = h) = \frac{k(k-1)(j-1)}{Q(Q-1)} + \frac{k}{Q}$$

et

$$(3.11) \quad E(R_j) = \frac{n(j-1)(n-1)}{N(N-1)} + \frac{n}{N}$$

Donnons enfin la loi conjointe de (R, π) , avec $R=(R_1, \dots, R_Q)$. Notons déjà que pour $1 \leq j \leq Q$, $R_j \pi_j = R_j$. Pour tout Q -uplet $t=(t_1, \dots, t_Q)$ de réels, soit l'ensemble $a(t)=\{j, 1 \leq j \leq Q, t_j \neq 0\}$. Nous pouvons remarquer facilement que pour $a(r)=(a_1(r), \dots, a_k(r))$ sous la triple condition $\pi = x$, $s(x)=k$ et $a(x)=a(r)$, alors $R_{a_j(r)} = j$ pour $j=1, 2, \dots, k$ et $R_h = 0$ pour $h \notin a(r)$. Dès lors R prend une seule valeur sous $\pi = k$, $s(x)=k$ et $a(x)=a(r)$. En plus, pour $a(r) \neq a(x)$, l'évènement $(R=r, \pi = x)$ est un évènement impossible. Ceci nous donne la loi suivante

$$(3.12) \quad s(x) = k \implies (R = r, \pi = x) = \begin{cases} 0 & \text{si } a(r) \neq a(x) \\ P(\pi = x) & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer les résultats

3.1. Preuve de la proposition 1.

Cas 1. $h=l=n$. Alors $p_{se,n} = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (q-R_j+1)\gamma(e_j)\pi_j$.

Dans les calculs ci-dessous, nous utilisons symatiquement les propriétés ci-dessus et les moments d'ordre un et deux d'une loi hypergéométrique qui sont

$$\frac{nQ}{N} = \sum_{1 \leq k \leq n} kP(q=k) ; \quad \frac{n(n-1)Q(Q-1)}{N(N-1)} = \sum_{1 \leq k \leq n} k(k-1)P(q=k).$$

Alors

$$\begin{aligned} E(p_{se,n}) &= \frac{2}{n(n+1)} \left[\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E(\pi_j(q+1)) - \sum_{1 \leq j \leq Q} E(R_j)\gamma(e_j) \right] \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left[\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{k}{Q} (k+1)P(q=k) - \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \sum_{1 \leq k \leq n} E(R_j/q=k)P(q=k) \right] \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left[\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \left(\frac{n(n-1)(Q-1)}{N(N-1)} + \frac{2n}{N} \right) - \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1)\gamma(e_j) - \frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left[\frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (Q-j)\gamma(e_j) - \frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left[\frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (Q-j+1)\gamma(e_j) - \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) + \frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \left[\frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (Q-j+1)\gamma(e_j) - \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\ &= P_{SE,N}(N, N)(1 + \mathcal{O}(N^{-2})) + \mathcal{O}(n^{-1}) = P_{SE,N}(N, N) + \mathcal{O}(n^{-1}). \end{aligned}$$

Cas 2. $h=n, l=q$. Alors $p_{se,n} = \frac{2}{n(q+1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (q-R_j+1)\gamma(e_j)\pi_j$.

$$\begin{aligned}
 E(p_{se,n}) &= \frac{2}{n} \left[\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E(\pi_j) - \sum_{1 \leq j \leq Q} E\left(\frac{1}{q+1} R_j\right) \gamma(e_j) \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[\frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\gamma(e_j)}{k+1} P(R_j/q = k) P(q = k) \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[\frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\gamma(e_j)}{k+1} \left(\frac{k(k-1)(j-1)}{Q(Q-1)} + \frac{k}{Q} \right) P(q = k) \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[\frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\gamma(e_j)}{k+1} \left(\frac{k(k-1)(j-1)}{Q(Q-1)} + \frac{k}{Q} \right) P(q = k) \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[\frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \frac{n}{N(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) + \frac{2K^n}{Q(Q-1)} \sum_{1 \leq k \leq n} (j-1) \gamma(e_j) - \frac{K^n}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\
 \text{où } K^n &= \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{k}{k+1} P(q = k) \leq 2. \text{ Alors} \\
 E(p_{se,n}) &= \frac{2}{N(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (Q-j+1) \gamma(e_j) + \mathcal{O}(n^{-1}) = (1 + \mathcal{O}(Q^{-1})) P_{SE,N}(N, Q) + \mathcal{O}(n^{-1}) \\
 &= P_{SE,N}(N, Q) + \mathcal{O}(n^{-1}).
 \end{aligned}$$

Cas 3. $h=q, l=n$. Alors $p_{se,n} = \frac{2}{q(n+1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (q-R_j+1) \gamma(e_j) \pi_j$.

$$\begin{aligned}
 E(p_{se,n}) &= \frac{2}{n+1} \left[\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E\left(\left(1 + \frac{1}{q}\right) \pi_j\right) - \sum_{1 \leq j \leq Q} E\left(\frac{1}{q+1} R_j\right) \gamma(e_j) \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[\frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) + \frac{K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\gamma(e_j)}{k} P(R_j/q = k) P(q = k) \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[\frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) + \frac{K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\gamma(e_j)}{k} \left(\frac{k(k-1)(j-1)}{Q(Q-1)} + \frac{k}{Q} \right) P(q = k) \right] \\
 &= \frac{2}{n} \left[\frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) + \frac{K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\
 &\quad - \frac{n}{N(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) + \frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) - \frac{K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \\
 &= \frac{2}{N(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (Q-j) \gamma(e_j) + \mathcal{O}(n^{-1}) \\
 &= P_{SE,N}(Q, N) + \mathcal{O}(n^{-1}).
 \end{aligned}$$

Cas 4. $h=q, l=q$. Alors $p_{se,n} = \frac{2}{q(q+1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (q-R_j+1) \gamma(e_j) \pi_j$.

$$\begin{aligned}
E(p_{se,n}) &= 2\left[\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E\left(\frac{1}{q}\right) \pi_j - \sum_{1 \leq j \leq Q} E\left(\frac{1}{q(q+1)} R_j\right) \gamma(e_j) \right] \\
&= 2\left[\frac{K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\gamma(e_j)}{k(k+1)} P(R_j/q = k) P(q = k) \right] \\
&= 2\left[\frac{K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{\gamma(e_j)}{k(k+1)} \left(\frac{k(k-1)(j-1)}{Q(Q-1)} + \frac{k}{Q} \right) P(q = k) \right] \\
&= 2\left[\frac{K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) + \frac{K}{Q(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\zeta(n)}{Q(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) - \frac{\zeta(n)}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\
&= P_{SE,N}(Q, Q) + \mathcal{O}(n^{-1}),
\end{aligned}$$

puisque $\zeta(n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k+1} P(q = k) \leq (N+1)/((Q+1)(n+1)) = \mathcal{O}(n^{-1}N/Q)$.

3.2. Preuve de la proposition 2. Les cas (n, q, n) et (q, n, n) d'une part, puis les cas (q, n, q) et (n, q, q) de l'autre, sont identiques. Il nous reste donc six cas : (n, n, n) , (n, n, q) , (n, q, n) , (n, q, q) , (q, q, n) et (q, q, q) .

Cas 5. (n, n, n) : $p_{SH,n} = \frac{1}{n^2} [\sum_{1 \leq j \leq Q} (2n+1) \gamma(e_j) \pi_j - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} R_j \gamma(e_j)]$.
Donc

$$\begin{aligned}
E(p_{SH,n}) &= \frac{1}{n^2} \left[\frac{n(2n+1)}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) P(R_j/q = k) P(q = k) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\frac{n(2n+1)}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) \left(\frac{k(k-1)(j-1)}{Q(Q-1)} + \frac{k}{Q} \right) P(q = k) \right] \\
&= \frac{1}{n^2} \left[\frac{n(2n+1)}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \frac{2n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) - \frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\
&= \frac{1}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (2N-2j) \gamma(e_j) + \frac{2}{nN(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) \\
&= P_{SH,N}(N, N, N) + \mathcal{O}(n^{-1})
\end{aligned}$$

Cas 6. (n, n, q) : $p_{SH,n} = \frac{1}{n^2} [\sum_{1 \leq j \leq Q} (2q+1) \gamma(e_j) \pi_j - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} R_j \gamma(e_j)]$.

Donc

$$E(p_{SH,n}) = \frac{1}{n^2} \left[\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E((2q+1)\pi_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) P(R_j/q = k) P(q = k) \right]$$

D'après ce qui précède,

$$E\left(2 \sum_{1 \leq j \leq Q} R_j \gamma(e_j)\right) = \frac{2n(n-1)}{N(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) - \frac{n}{N} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j)$$

de plus

$$\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E((2q+1)\pi_j) = \left(\frac{2nK}{N} + \frac{2n(n-1)(Q-1)}{N(N-1)} \right) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j)$$

D'où

$$\begin{aligned} &= \frac{n-1}{nN(N-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (2Q-2j)\gamma(e_j) + \mathcal{O}(n^{-1}) \\ &= P_{SH,N}(N, N, Q) + \mathcal{O}(n^{-1}). \end{aligned}$$

Cas 7. $(q, n, q) : p_{SH,n} = \frac{1}{qn} [\sum_{1 \leq j \leq Q} (2q+1) \gamma(e_j) \pi_j - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} R_j \gamma(e_j)]$.

Donc

$$\begin{aligned} E(p_{SH,n}) &= \frac{1}{n} \left[\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E\left(\left(2 + \frac{1}{q}\right)\pi_j\right) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) P\left(\frac{1}{q}R_j/q = k\right) P(q = k) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{K}{Q} (2n+1) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) \left(\frac{(k-1)(j-1)}{Q(Q-1)} + \frac{1}{Q} \right) P(q = k) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\left(\frac{2Kn}{N} + \frac{K}{Q} \right) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \left[\frac{2n}{N(Q-1)} - \frac{2K}{Q(Q-1)} \right] \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1)\gamma(e_j) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\ &= \left[\frac{2(K-1)}{Q} \right] \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) + \frac{1}{N(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (2Q-2j)\gamma(e_j) + o(n^{-1}) \\ &= P_{SH,N}(Q, N, Q) + \mathcal{O}(n^{-1}). \end{aligned}$$

Cas 8. $(q, n, n) : p_{SH,n} = \frac{1}{qn} [\sum_{1 \leq j \leq Q} (2n+1) \gamma(e_j) \pi_j - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} R_j \gamma(e_j)]$.

Donc

$$\begin{aligned} E(p_{SH,n}) &= \frac{1}{n} \left[(2n+1) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E\left(\frac{1}{q}\pi_j\right) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) P\left(\frac{1}{q}R_j/q = k\right) P(q = k) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{K}{Q} (2n+1) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) \left(\frac{(k-1)(j-1)}{Q(Q-1)} + \frac{1}{Q} \right) P(q = k) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{K(2n+1)}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - \left[\frac{2n}{N(Q-1)} - \frac{2K}{Q(Q-1)} \right] \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1)\gamma(e_j) \right. \\ &\quad \left. + \frac{K}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) \right] \\ &= \left[\frac{(K-1)(2n+1)}{nQ} \right] \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) + \frac{1}{QN} \sum_{1 \leq j \leq Q} (2N-2Q)\gamma(e_j) + o(n^{-1}) \\ &= P_{SH,N}(Q, N, N) + \mathcal{O}(n^{-1}). \end{aligned}$$

Cas 9. $(q, q, n) : p_{SH,n} = \frac{1}{q^2} [\sum_{1 \leq j \leq Q} (2n+1) \gamma(e_j) \pi_j - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} R_j \gamma(e_j)]$.

Donc

$$\begin{aligned}
E(p_{SH,n}) &= [(2n+1) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E(\frac{1}{q^2} \pi_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) P(\frac{1}{q^2} R_j/q = k) P(q = k)] \\
&= [\frac{K'}{Q} (2n+1) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) (\frac{(k-1)(j-1)}{kQ(Q-1)} + \frac{1}{kQ}) P(q = k)] \\
&= [\frac{K'(2n+1)}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - [\frac{2}{Q(Q-1)} - \frac{2K'}{Q(Q-1)}] \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) \\
&\quad - \frac{2K'}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j)] \\
&= \frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (2nK' - 2j + 1) \gamma(e_j) + \mathcal{O}(n^{-1})
\end{aligned}$$

puisque $K' = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} P(q = k) \leq 2 \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k+1} P(q = k) = \mathcal{O}(n^{-1})$.

Cas 10. $(q, q, q) : p_{SH,n} = \frac{1}{q^2} [\sum_{1 \leq j \leq Q} (2q+1) \gamma(e_j) \pi_j - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} R_j \gamma(e_j)]$.

Donc

$$\begin{aligned}
E(p_{SH,n}) &= [\sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) E((2q^{-1} + q^{-2}) \pi_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) P(\frac{1}{q^2} R_j/q = k) P(q = k)] \\
&= [(\frac{2K}{Q} + \frac{K'}{Q}) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - 2 \sum_{1 \leq j \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq n} \gamma(e_j) (\frac{(k-1)(j-1)}{kQ(Q-1)} + \frac{1}{kQ}) P(q = k)] \\
&= [(\frac{2K}{Q} + \frac{K'}{Q}) \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) - [\frac{2}{Q(Q-1)} - \frac{2K'}{Q(Q-1)}] \sum_{1 \leq j \leq Q} (j-1) \gamma(e_j) \\
&\quad - \frac{2K'}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j)] \\
&= \frac{2(K-1)}{Q} \sum_{1 \leq j \leq Q} \gamma(e_j) + \frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (2Q - 2j) \gamma(e_j) + \mathcal{O}(K') \\
&= P_{SH,N}(Q, Q, Q) + \mathcal{O}(n^{-1})
\end{aligned}$$

Ceci finit la preuve de la proposition 2.

Conclusion 1. *Notre étude a montré que sur le plan statistique, les mesures de Sen et de Shorrocks ne sont certes pas non biaisées mais sont asymptotiquement convergentes et génèrent grâce aux coefficients de relativiation une grande classe de statistiques dont les simulations permettent d'en tirer les plus sensibles. La théorie de la normalité asymptotique viendra compléter cette article.*

REFERENCES

- [1] **Jean Marie GROSBAS**(1987), *Méthodes statistiques des sondages*, Economica Paris
 [2] **Sen Amartya k.**(1976). Poverty : An Ordinal Approach to Measurement. *Econometrica*, 44, 219-231.
 [3] **Martin Ravallion (1992)**. Poverty Comparisons. A Guide to Concepts and Methods. Lsms, Working Paper, n°88, *WorldBank*.
 [4] **Martin Ravallion (1996)**. Comparaison de la pauvreté : Concepts et méthodes. Lsms Working paper, n°122, *WorldBank*
 [5] **Foster, J.E, J. Greer, and Thorbecke(184)**. A class of decomposable Povert Measure Indices. *Econometrika*, 52, 761-766
 [6] **Gane Samb Lo (2003)**. Comportement asymptotique des indicateurs de pauvreté, document de travail, Université Gaston Berger de Saint-Louis, Sénégal.

4. PROBLEMATIQUES DE RECHERCHES

- (1) Etendre les résultats pour la famille de Sen élargie en considérant les deux poids $(q-j+1)$ et $(n-j+1)$.
- (2) Faire les simulations a partir de la base ESAM
- (3) Faire la théorie de la normalité asymptotique.
 - (a): Calcul des variances
 - (b): Calcul de l'expression de la fonction des moments et étude de sa convergence.

Conjecture 1. *Dans le cas restant (q, q, n) de la proposition 2, la preuve a permis de montrer que*

$$E(p_{SH,n}) = \frac{1}{Q(Q-1)} \sum_{1 \leq j \leq Q} (2nK' - 2j + 1)\gamma(e_j) + \mathcal{O}(n^{-1})$$

où $K' = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{k} P(q = k)$. Nous conjecturons que $nK' - N = \mathcal{O}(n^{-1})$ et dès lors, nous pourrions conclure que $E(p_{SH,n}) = P_{SH,N} + \mathcal{O}(n^{-1})$.

5. APPENDICE

6. LES PRINCIPAUX AXIOMES DES INDICATEURS DE PAUVRETE

Un indicateur de pauvreté est de la forme:

$$(6.1) \quad \begin{array}{ccc} P : N \times R_+ \times R^N & \longmapsto & R_+ \\ & \hookrightarrow & P(N, Z, Y) \end{array}$$

où N est la taille de la population, Z le seuil de pauvreté, Y le vecteur des revenus. La valeur de la fonction est d'autant plus grande que la population est plus pauvre. La valeur nulle signifie qu'il n'y a pas de pauvres dans la population. Il serait souhaitable d'avoir les propriétés ci-dessus. Chaque axiome sera abrégé par une ou deux lettres capitales. Nous donnerons pour chacune des mesures précises ci-dessus l'état de vérification ou non.

6.1. Enoncé des axiomes.

- (1) **Axiome de symétrie. (S).**

La mesure de pauvreté ne change pas avec la permutation des revenus entre les individus de la population, i.e., pour toute symétrie σ de $\{1, 2, \dots, N\}$, on a

$$(6.2) \quad P(N, Z, Y) = P(N, Z, \sigma(Y))$$

avec $\sigma(Y) = (Y_{\sigma(1)}, \dots, Y_{\sigma(N)})$

(2) **Axiome de focalisation. (F)**

La mesure de pauvreté ne dépend que des revenus des individus pauvres, i.e., si $\Gamma = \{j, 1 \leq j \leq 1, Y_j \leq Z\}$ et si $Y_Q = (Y_j, j \in \Gamma)$, on a

$$(6.3) \quad P(N, Z, Y) = P(Q, Z, Y_Q)$$

On peut définir cela par l'axiome de focalisation relative et définir par axiome de focalisation absolue la propriété ci-dessous

$$P(N, Z, Y) = P(N, Z, Y_Q)$$

(3) **Axiome d'invariance par réplcation. (IR).**

En réunissant deux populations identiques en taille et d'égale pauvreté, la pauvreté reste identique en valeur, i.e.

$$(6.4) \quad P(N, Z, Y) = P(2N, Z, (Y, Y))$$

(4) **Axiome d'invariance additive (IA) et multiplicative (IM).**

En translatant chaque revenu d'une amplitude α tout en translatant le seuil de la même amplitude, ou en modifiant l'échelle des revenus d'une proportion $t > 0$, tout en modifiant le seuil de la même proportion, la pauvreté ne change pas en mesure, i.e.

$$(6.5) \quad \forall \alpha > 0, P(N, Z + \alpha, Y + \alpha I) = P(N, Z, Y)$$

où $I = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, et

$$(6.6) \quad \forall t > 0, P(N, tZ, tY) = P(N, Z, Y)$$

(5) **Axiome de continuité en tout seuil $Z_i 0$. (C).**

(6) **Axiome de monotonie décroissante. (MD)**

La mesure de pauvreté est une fonction décroissante par rapport au revenu d'un individu déjà pauvre, i.e.e, que si un individu pauvre devient plus pauvre, la mesure de pauvreté augmente.

(7) **Axiome de transfert absolu. (TA)**

En transférant une partie du revenu d'un individu pauvre vers un individu moins pauvre, la mesure de pauvreté augmente.

(8) **Axiome de transfert comparatif. (TC).**

Soit deux individus pauvres i et j , i étant plus pauvre que le deuxième, et un troisième individu k moins pauvre que les deux. Le transfert d'une partie $r > 0$ du revenu de l'individu i vers k engendre une augmentation de la mesure de pauvreté strictement plus grande que celui du transfert de la même partie r du revenu de j vers k .

(9) **Axiome de cohérence de groupe (CG)**

Soit I un groupe de la population de taille N_I et $Y_I = (Y_i, i \in I)$ le vecteur revenu de I , de sorte que le vecteur revenu total soit noté $Y = (Y_I, Y_{N-I})$. Remarquons que l'ordre dans le vecteur n'a pas d'importance à cause de l'axiome de symétrie. Imaginons que le revenu d'un individu $i \in I$ soit modifié en \tilde{Y}_i et soit $\tilde{Y}_{I,i}$ le nouveau vecteur de revenu de I et $\tilde{Y}_{N,i}$ le nouveau vecteur de revenus de la population globale. Cet axiome veut que le sens de variation de la mesure de pauvreté dans le groupe résultant de la modification du revenu de l'individu i , soit le même sur toute la population,

.i.e.

$$(6.7) \quad (P(N, Z, Y) - P(N, Z, \tilde{Y}_{N,i})) \times (P(N_I, Z, Y_I) - P(N_I, Z, \tilde{Y}_{I,i})) \geq 0.$$

(10) **Axiome de décomposabilité (D).**

Supposons que la population soit divisée en k sous-groupes I_i , ($i=1,2,\dots,i=k$), de tailles respectives N_i , ($i=1,\dots,k$), de vecteurs revenus notés $Y_{I_i} = (Y_h, h \in I_i)$, ($i=1,\dots,k$). Alors la mesure de pauvreté est décomposée entre les différents groupes proportionnellement à leurs effectifs, .i.e.,

$$(6.8) \quad P(N, Z, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k N_i P(N_i, Z, Y_{I_i})$$

L'analyse de ces axiomes et leurs implications sortent du cadre de cette article. Le lecteur intéressé peut se reporter à [?] qui donne l'état de vérification des mesures de pauvreté définies ci-haut

6.2. **Tableau des propriétés des principales mesures de pauvreté.** Voici le tableau de l'état de vérification des axiomes par les indicateurs classiques.

Axiome	S	F	IR	IA/IM	M	TA	TC	CG	D	C
I_N	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F
J_N	V	V	V	V	V	F	F	F	F	F
$P_{SE,N}$	V	V	V	V	F	F	F	F	F	F
$P_{SH,N}$	V	V	V	V	V	V	F	F	F	V
$PFGT, N, \alpha$	V	V	V	V	V	V si $\alpha > 1$	V si $\alpha > 1$	V	V	V

Body Math

REFERENCES

[1] **Taleb Ely Ould Taleb Ahmed** (2003). *Les mesures de la pauvreté, de l'inégalité et l'impact de la croissance économique*, mémoire de DEA, Université Gaston Berger de Saint-Louis.

LABORATOIRE D'ETUDES ET DE RECHERCHES EN STATISTIQUES ET DEVELOPPEMENT (LER-STAD), UNIVERSITÉ GASTON BERGER DE SAINT-LOUIS. SÉNÉGAL., BP 234 SAINT-LOUIS, SÉNÉGAL.
E-mail address: gslo@uva.org